DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

Zadatak B-1.1.

Neka je $a > 1$. Točke (x, y) za čije koordinate vrijedi $|x| + y = a$, $x^2 + y = a|x|$ određuju u koordinatnoj ravnini lik površine 120 kvadratnih jedinica. Izračunajte realan broj a.

Rješenje.

Iz prve jednadžbe sustava je $y = -|x| + a$, što zamjenom u drugoj jednadžbi daje

$$x^2 - |x| + a = a|x|.$$

Slijedi niz ekvivalentnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
& x^2 - |x| + a - a|x| = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & |x|^2 - |x| + a - a|x| = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & |x|(|x| - 1) - a(|x| - 1) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (|x| - 1)(|x| - a) = 0
\end{aligned}$$

Imamo dvije mogućnosti: $|x| = 1$ ili $|x| = a$. Oba su rješenja moguća jer je $a > 0$.
U prvom slučaju je $x = 1$ ili $x = -1$, a u drugom $x = a$ ili $x = -a$.
Za $x = 1, y = -1 + a$, za $x = -1, y = -1 + a$.
Za $x = a, y = 0$ i za $x = -a, y = 0$.
Tada su vrhovi danog lika sljedeće točke:

$$(-a, 0), \quad (a, 0), \quad (1, a - 1), \quad (-1, a - 1).$$

Ove točke u koordinatnom sustavu određuju jednakokračan trapez kojemu je os ordinata os simetrije, pa je njegova površina

$$P = \frac{2a + 2}{2} \cdot (a - 1) = (a + 1)(a - 1) = a^2 - 1.$$

Iz $120 = a^2 - 1$, slijedi $a^2 = 121 \Rightarrow a = 11\,(a > 1)$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i razlikovanjem slučajeva $x \leqslant 0$ i $x > 0$. U prvom slučaju dobivamo jednadžbu $(x + 1)(x + a) = 0$, a u drugom $(x - 1)(x - a) = 0$, čija su rješenja za x brojevi $-1, -a, 1, a$. Dalje postupamo kao i u prethodnom rješenju.

Zadatak B-1.2.

Riješite nejednadžbu

$$\frac{x-8}{2012} + \frac{x-7}{2013} + \frac{x-6}{2014} + \frac{x-5}{2015} + \frac{x-4}{2016} \leqslant \frac{x-2012}{8} + \frac{x-2013}{7} + \frac{x-2014}{6} + \frac{x-2015}{5} + \frac{x-2016}{4}.$$

Rješenje.

$$\frac{x-8}{2012}+\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016} \leqslant \frac{x-2012}{8}+\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}.$$

Dodamo pet puta -1 na obje strane

$$\frac{x-8}{2012}-1+\frac{x-7}{2013}-1+\frac{x-6}{2014}-1+\frac{x-5}{2015}-1+\frac{x-4}{2016}-1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x-2012}{8}-1+\frac{x-2013}{7}-1+\frac{x-2014}{6}-1+\frac{x-2015}{5}-1+\frac{x-2016}{4}-1,$$

$$\frac{x-2020}{2012}+\frac{x-2020}{2013}+\frac{x-2020}{2014}+\frac{x-2020}{2015}+\frac{x-2020}{2016} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x-2020}{8}+\frac{x-2020}{7}+\frac{x-2020}{6}+\frac{x-2020}{5}+\frac{x-2020}{4}$$

$$(x-2020)\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}-\frac{1}{8}-\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right) \leqslant 0$$

Izraz u drugoj zagradi je negativan jer je svaki od prvih 5 razlomaka manji od svakog od drugih 5 razlomaka, zbog čega je njihova razlika negativna. Tada je cijeli izraz manji ili jednak nuli samo ako je $x-2020 \geqslant 0$, $x \geqslant 2020$, $x \in [2020,+\infty\rangle$.

Zadatak B-1.3.

U skupu prostih brojeva riješite jednadžbu

$$2p^3-q^2=2(p+q)^2.$$

Rješenje.

Kako je desna strana jednakosti paran broj, to i lijeva strana mora biti paran broj. Da bi izraz $2p^3-q^2$ bio paran, q^2 mora biti paran, a tada je i q paran broj. Jedini paran prost broj je broj dva, pa je $q=2$. Tada početna jednakost prelazi u

$$2p^3-4=2(p+2)^2,$$

što je ekvivalentno s

$$p^3-p^2-4p-6=0,$$

odnosno

$$p(p^2-p-4)=6.$$

Zaključujemo da p mora biti djelitelj broja 6, a kako je p prost broj, to mogu biti samo brojevi $p=2$ ili $p=3$.

Lagano se provjerava da je gornja jednakost zadovoljena samo za $p=3$, te je stoga uređeni par $(p,q)=(3,2)$ jedino rješenje dane jednadžbe.

Zadatak B-1.4.

Tri prijatelja Ante, Bojan i Vinko pogađaju nepoznat šesteroznamenkasti broj koji je složen od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri čemu se znamenke ne ponavljaju. Ante je rekao da je to broj 123456, Bojan 245163, a Vinko 463215. Niti jedan od njih trojice nije pogodio točno o kojem se broju radi, međutim Ante je pogodio točne pozicije za 3 znamenke, Bojan također za 3 znamenke, a Vinko poziciju za 1 znamenku. Odredite nepoznati broj.

Rješenje.

Primijetimo da su Ante, Bojan i Vinko ukupno pogodili točnu poziciju za 7 znamenki što znači da su neka dvojica pogodila točnu poziciju iste znamenke. Kako su jedino na trećoj poziciji neka dvojica (Ante i Vinko) pretpostavila istu znamenku, broj 3, to treća znamenka mora biti jednaka 3.

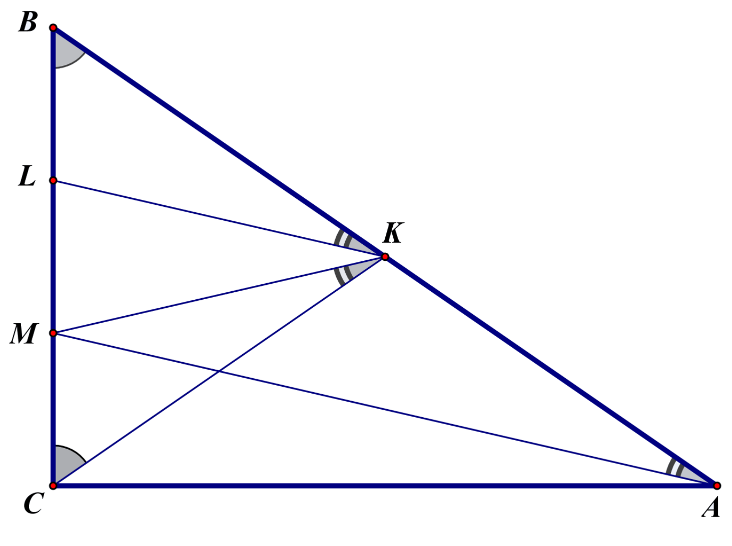
Odatle proizlazi da je Bojan na toj poziciji stavio krivu znamenku, broj 5. Broj 5 se ne nalazi niti na šestom mjestu jer je znamenka 3 bila jedina točna znamenka za Vinka, pa se broj 5 nalazi na petom mjestu, na poziciji koju je pretpostavio Ante.

Nadalje promatramo petu poziciju u Bojanovom broju, a tu je znamenka 6. Znamenka 6 ne može biti na toj poziciji (jer je na njoj broj 5), a nije niti na drugoj poziciji jer Vinko nije pogodio tu poziciju, pa se nalazi na šestom mjestu, kao što je pretpostavio Ante. Pozicije ostalih znamenke je pretpostavio Bojan, tj. 2 je na prvom mjestu, 4 na drugom mjestu, a 1 na četvrom mjestu. Dakle, traženi je broj jednak 243156.

Zadatak B-1.5.

Točka M nalazi se na kateti $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta ABC tako da vrijedi $|BM| = 2 \cdot |MC|$. Ako je K polovište hipotenuze $\overline{AB}$, dokažite da je $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MKC$. Odredite omjer površina trokuta MKC i trokuta ABC.

Rješenje.



Označimo s L polovište dužine $\overline{BM}$. Uočimo da je $\overline{LK}$ srednjica trokuta MBA, pa je $LK \parallel MA$. Odatle slijedi $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BKL$, pa je dovoljno pokazati da je $\sphericalangle BKL = \sphericalangle MKC$.

Promatramo trokute LKB i MKC.

Kako je K polovište hipotenuze, vrijedi

$$|KB| = |KC|,$$

pa je

$$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KCB.$$

Iz zadane jednakosti slijedi

$$|BL| = \frac{1}{2}|BM| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |CM| = |CM|,$$

te je

$$\sphericalangle KBL = \sphericalangle KCM.$$

Prema poučku SKS, trokuti LKB i MKC su sukladni, a tada vrijedi $\sphericalangle BKL = \sphericalangle MKC$.

Trokuti BCK i ACK imaju zajedničku visinu i duljinu osnovice $\left(\frac{c}{2}\right)$, pa imaju istu površinu.
Isto tako trokuti LBK, LMK i MCK imaju istu duljinu osnovice $(|BL| = |LM| = |MC|)$ i zajedničku visinu, pa time i istu površinu.

Tada je $P_\triangle(ABC) = 2P_\triangle(CBK) = 2 \cdot 3P_\triangle(MKC) = 6P_\triangle(MKC)$, pa je traženi omjer

$$\frac{P_\triangle(MKC)}{P_\triangle(ABC)} = \frac{1}{6}.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

Zadatak B-2.1.

Riješite sustav jednadžbi

$$x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17$$
$$x + xy + y = 5.$$

Rješenje.

Zapišimo prvu jednadžbu u obliku pogodnom za zamjenu varijabli.

$$x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17$$
$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) + x^3y^3 = 17$$
$$(x+y)[(x+y)^2 - 3xy] + (xy)^3 = 17$$

Nakon zamjene $x + y = p$, $xy = q$ sustav

$$\begin{cases} (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] + (xy)^3 & = 17 \\ x + xy + y & = 5 \end{cases}$$

prelazi u sustav

$$\begin{cases} p(p^2 - 3q) + q^3 & = 17 \\ p + q & = 5, \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} p^3 - 3pq + q^3 & = 17 \\ p + q & = 5. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je $p = 5 - q$, a nakon zamjene u prvoj jednadžbi dobivamo

$$(5-q)^3 - 3q(5-q) + q^3 - 17 = 0.$$

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$18q^2 - 90q + 108 = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 - 5q + 6 = 0.$$

Odatle imamo $q_1 = 2, q_2 = 3$, a zatim i $p_1 = 3, p_2 = 2$. Preostaje još riješiti sljedeće sustave jednadžbi:

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ xy & = 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x + y & = 2 \\ xy & = 3. \end{cases}$$

Rješenja prvog sustava su $x_1 = 1, y_1 = 2$ i $x_2 = 2, y_2 = 1$.

Rješenja drugog sustava su $x_1 = 1 + i\sqrt{2}$, $y_1 = 1 - i\sqrt{2}$ i $x_2 = 1 - i\sqrt{2}$, $y_2 = 1 + i\sqrt{2}$.

Zadatak B-2.2.

Kate i Mare su se često nadmetale u rješavanju matematičkih zadataka. Profesoru je dosadilo njihovo nadmetanje pa im je dao zadatak kojeg moraju rješavati zajedničkim snagama. Kate je na ploči redom ispisivala 2016 brojeva, s tim da je svaki od brojeva bio ili $\sqrt{2}-1$ ili $\sqrt{2}+1$. Mare je redom pomnožila prvi i drugi broj, zatim treći i četvrti, i tako sve do zadnja dva napisana broja, a zatim je sve te umnoške zbrojila i zapisala rezultat. Ako zbroj nije bio cijeli broj Kate ga je obrisala. Postupak su morale ponoviti dok na ploči ne napišu sve cijele brojeve koje može poprimiti Marin zbroj. Koliko je takvih zbrojeva ostalo na ploči?

Rješenje.

Neka je $S = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \cdots x_{2015}x_{2016}$, gdje su svi brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}, x_{2016}$ jednaki $\sqrt{2}-1$ ili $\sqrt{2}+1$. U navedenom se zbroju mogu pojaviti samo tri vrste pribrojnika, odnosno tri vrste umnoška uzastopnih brojeva. To su:

$$\begin{aligned}
A &= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2} \\
B &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1) = 3+2\sqrt{2} \\
C &= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1.
\end{aligned}$$

Da bi zbroj S bio cijeli broj, očito je da u danom zbroju mora biti jednak broj pribrojnika vrste A i vrste B.

Neka je u danom zbroju n pribrojnika vrste A i n pribrojnika vrste B. Tada imamo $1008-2n$ pribrojnika vrste C.

$$S = n(3-2\sqrt{2}) + n(3+2\sqrt{2}) + (1008-2n)\cdot 1 = 1008+4n.$$

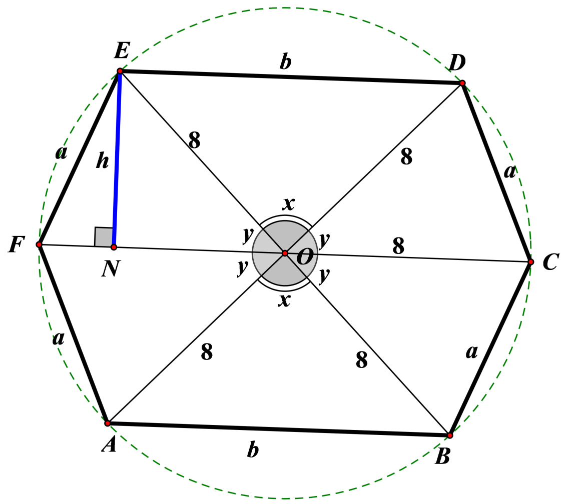
Ovakvih je cijelih brojeva koliko i mogućih izbora broja n. Kako n može biti bilo koji broj iz skupa $\{0,1,2,3,\ldots,504\}$, zbroj S može poprimati 505 različitih cjelobrojnih vrijednosti.

Zaključujemo da je na ploči ostalo zapisano 505 zbrojeva.

Zadatak B-2.3.

Duljine stranica šesterokuta $ABCDEF$ su redom $|AB| = b$, $|BC| = |CD| = a$, $|DE| = b$, $|EF| = |FA| = a$, $a \neq b$. Šesterokutu je opisana kružnica polumjera 8 sa središtem u točki O. Ako je $\cos\sphericalangle EFO = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, izračunajte opseg i površinu tog šesterokuta.

Rješenje.



Sljedeći su trokuti sukladni:

$$\triangle OAB \cong \triangle OED \qquad \text{(S-S-S)}$$
$$\triangle OBC \cong \triangle OCD \cong \triangle OEF \cong \triangle OFA \qquad \text{(S-S-S).}$$

Zbog toga imamo i jednakost sljedećih kutova: $\sphericalangle DOE = \sphericalangle AOB = x$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle EOF = \sphericalangle FOA = y$.

Odatle slijedi $2x + 4y = 360°$, to jest $x + 2y = 180°$. Zaključujemo da su točke C, O i F kolinearne te da su četverokuti $ABCF$ i $CDEF$ kružnici upisani jednakokračni trapezi. Neka je $h = |EN|$ duljina visine iz E na CF.

Tada vrijedi

$$\cos\sphericalangle EFO = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{8 - \frac{b}{2}}{a} \quad \Rightarrow \quad b = 16 - \frac{a\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ENO i ENF dobivamo

$$8^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(8 - \frac{b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 8b - 128 = 0.$$

Posljednja jednadžba zajedno s (1) daje

$$a^2 + 8\left(16 - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 128 = 0, \text{ odnosno } a^2 - 4a\sqrt{2} = 0.$$

Jedino moguće rješenje je $a = 4\sqrt{2}$. Tada je $b = 16 - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 12$. Visina $h = \sqrt{r^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Opseg šesterokuta je, dakle, $o = 4a + 2b = 16\sqrt{2} + 24$.

Površina šesterokuta je dvostruka površina trapeza $ABCF$: $P = 2 \cdot \frac{12+16}{2} \cdot 2\sqrt{7} = 56\sqrt{7}$.

Zadatak B-2.4.

Ako za realne brojeve x, y vrijedi jednakost $|x+y|+|x-y|=2$, odredite maksimalnu vrijednost izraza x^2-6x+y^2.

Rješenje.

Imamo sljedeće slučajeve:

1) $x+y \geqslant 0$, $x-y \geqslant 0$, odnosno $y \geqslant -x$, $y \leqslant x$. Tada imamo

$$x+y+x-y=2 \quad \Rightarrow \quad x=1, y \geqslant -1, y \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x=1, |y| \leqslant 1.$$

U tom je slučaju maksimalna vrijednost izraza x^2-6x+y^2 jednaka maksimalnoj vrijednosti izraza y^2-5 za $|y| \leqslant 1$, to jest na intervalu $[-1,1]$. Kako kvadratna funkcija u tjemenu ima minimum, maksimum se može postići samo u rubovima intervala $[-1,1]$. Maksimalna vrijednost za $y=1$ ili -1 iznosi -4.

2) $x+y \geqslant 0$, $x-y \leqslant 0$, odnosno $x \geqslant -y$, $x \leqslant y$. Tada imamo

$$x+y-x+y=2 \quad \Rightarrow \quad y=1, |x| \leqslant 1.$$

U tom je slučaju maksimalna vrijednost izraza x^2-6x+y^2 jednaka maksimalnoj vrijednosti izraza x^2-6x+1 na intervalu $[-1,1]$. Maksimum se postiže za $x=-1$ i iznosi 8.

3) $x+y \leqslant 0$, $x-y \geqslant 0$, odnosno $x \leqslant -y$, $x \geqslant y$. Tada imamo

$$-x-y+x-y=2 \quad \Rightarrow \quad y=-1, |x| \leqslant 1.$$

U tom je slučaju maksimalna vrijednost izraza x^2-6x+y^2 jednaka maksimalnoj vrijednosti izraza x^2-6x+1 na intervalu $[-1,1]$, a to je kao i u prethodnom slučaju 8.

4) $x+y \leqslant 0$, $x-y \leqslant 0$, odnosno $y \leqslant -x$, $y \geqslant x$. Tada imamo

$$-x-y-x+y=2 \quad \Rightarrow \quad x=-1, |y| \leqslant 1.$$

U tom je slučaju maksimalna vrijednost izraza x^2-6x+y^2 jednaka maksimalnoj vrijednosti izraza $7+y^2$ na intervalu $[-1,1]$. Kako kvadratna funkcija u tjemenu ima minimum, maksimum se može postići samo u rubovima intervala $[-1,1]$ pa zaključujemo da se maksimalna vrijednost postiže za $y=1$ ili -1 i iznosi 8.

Zaključujemo da je maksimalna vrijednost danog izraza 8, a postiže se za

$$(x,y)=(-1,1) \quad \text{i} \quad (-1,-1).$$

Zadatak B-2.5.

Kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 pridruženi su točkama kompleksne ravnine A, B, C koje su od ishodišta udaljene za 2016. Ako za kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 vrijedi $z_1+z_2+z_3=0$, izračunajte duljine stranica trokuta ABC.

Rješenje.

Neka je $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_3 = x_3 + y_3 i$.

Tada imamo $|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 2016^2$, $|z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2016^2$, $|z_3|^2 = x_3^2 + y_3^2 = 2016^2$.

Nadalje, iz $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ slijedi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{$*$}$$

Točke A, B, C imaju koordinate $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Duljinu stranice $\overline{AB}$ računamo po formuli za udaljenost točaka:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2.$$

Iz $(*)$ kvadriranjem dobijemo

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -2x_1x_2, \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -2y_1y_2.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \\ &= 2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) - (x_3^2 + y_3^2) = 4 \cdot 2016^2 - 2016^2 = 3 \cdot 2016^2. \end{aligned}$$

Analogno se dobije i

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= 2(x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 2016^2 \\ |CA|^2 &= 2(x_3^2 + y_3^2 + x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2) = 3 \cdot 2016^2. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je ABC jednakostraničan trokut kojemu duljina stranice iznosi $2016\sqrt{3}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

Zadatak B-3.1.

Neka je $a>0$, $a\neq 1$ realan broj. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba

$$\frac{a^{(\log m+2)x}+2a^{\frac{2x+\log m}{x}}}{a^{2+2x}}=3\,\frac{a^{\frac{1}{x}\cdot\log m}}{a^{2x}},$$

ima dva različita realna rješenja istog predznaka?

Rješenje.

Da bi logaritam bio dobro definiran mora vrijediti $m>0$, a zbog nazivnika $x\neq 0$. Pomnožimo jednadžbu s a^{2+2x} i dobijemo

$$a^{(\log m+2)x}+2a^{\frac{2x+\log m}{x}}=3a^{\frac{\log m}{x}}a^{2}.$$

Sređivanjem tog izraza slijedi:

$$\begin{aligned}
&a^{(\log m+2)x}=3a^{\frac{\log m+2x}{x}}-2a^{\frac{2x+\log m}{x}}\\
&a^{(\log m+2)x}=a^{\frac{\log m+2x}{x}}\\
&(\log m+2)x=\frac{\log m+2x}{x}\\
&(\log m+2)x^2-2x-\log m=0.
\end{aligned}$$

Da bi ovo bila kvadratna jednadžba, mora vrijediti $\log m+2\neq 0$, odnosno $m\neq 0.01$. Diskriminanta mora biti pozitivna,

$$D=4+4\log m(\log m+2)=4(\log^2 m+2\log m+1)=4(\log m+1)^2>0.$$

Diskriminanta je pozitivna za svaki $m>0$ osim za $\log m=-1$, tj. $m\neq\frac{1}{10}$.
Rješenja kvadratne jednadžbe su:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4(\log m+1)^2}}{2(\log m+2)}=\frac{1\pm(\log m+1)}{\log m+2},$$

odnosno $x_1=1$ i $x_2=\frac{-\log m}{\log m+2}$.
Rješenja su istog predznaka ako je $\frac{-\log m}{\log m+2}>0$, tj.

$$\log m\in\langle -2,0\rangle\ \Rightarrow\ m\in\left\langle\frac{1}{100},1\right\rangle\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}.$$

Zadatak B-3.2.

Odredite dva prirodna broja koja su djeljiva sa četiri i kojima je razlika kubova četveroznamenkasti broj djeljiv s 91.

Rješenje.

Neka je $x = 4m$ i $y = 4n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $x^3 - y^3 = 91k$, $k \in \mathbb{N}$.
Tada je $64m^3 - 64n^3 = 91k$, odnosno $64(m^3 - n^3) = 91k$, $k \in \mathbb{N}$. Ova je jednakost moguća samo ako je broj k višekratnik broja 64. Kako broj $91k$ mora biti četveroznamenkasti broj, jedini višekratnik za koji to vrijedi je $k = 64$, $(91 \cdot 64 = 5824)$. Odatle slijedi da je

$$m^3 - n^3 = 91 \Leftrightarrow (m-n)(m^2 + mn + n^2) = 13 \cdot 7.$$

Imamo sljedeće mogućnosti, odnosno sustave jednadžbi:

1. $m - n = 13$, $m^2 + mn + n^2 = 7$ ili
2. $m - n = 7$, $m^2 + mn + n^2 = 13$ ili
3. $m - n = 1$, $m^2 + mn + n^2 = 91$ ili
4. $m - n = 91$, $m^2 + mn + n^2 = 1$.

Kako su m i n prirodni brojevi nužno je

$$m - n < m^2 + mn + n^2,$$

stoga je dovoljno je promotriti drugi i treći slučaj. (U prvom i četvrtom slučaju sustav se svodi na kvadratnu jednadžbu koja nema realnih rješenja.)
Sustav 2. svodi se na kvadratnu jednadžbu $n^2 + 7n + 12 = 0$, čija su rješenja negativni brojevi -3 i -4.
Sustav 3. daje jednadžbu koja ima jedno pozitivno rješenje $n = 5$. Tada je $m = n + 1 = 6$.
Zaključujemo da su traženi brojevi $x = 4 \cdot 6 = 24$ i $y = 4 \cdot 5 = 20$ jedino rješenje zadatka.

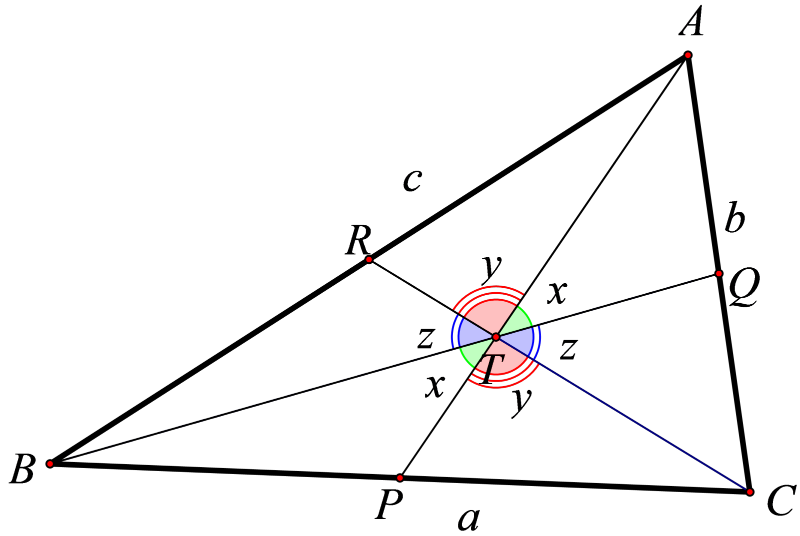
Zadatak B-3.3.

Matko je za svoju web-stranicu napravio od krugova neobičan logo. Trokutu je konstruirao težišnice koje su trokut podijelile na 6 trokutića, te je svakom trokutiću konstruirao opisani krug. Mjerio je površine opisanih krugova i dobio zanimljivu jednakost

$$\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{P_3}{P_4} \cdot \frac{P_5}{P_6} = 1.$$

Dokažite Matkovu jednakost.
(Površine $P_1, \ldots, P_6$ su redom površine krugova opisanih susjednim trokutićima.)

Rješenje.



Vrijedi $\sphericalangle BTP = \sphericalangle ATQ = x$, $\sphericalangle CTP = \sphericalangle ATR = y$, $\sphericalangle CTQ = \sphericalangle BTR = z$ jer su to vršni kutovi.
Prema poučku o sinusu:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin x} = 2r_1, \quad \frac{\frac{a}{2}}{\sin y} = 2r_2,$$
$$\frac{\frac{b}{2}}{\sin z} = 2r_3, \quad \frac{\frac{b}{2}}{\sin x} = 2r_4,$$
$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin y} = 2r_5, \quad \frac{\frac{c}{2}}{\sin z} = 2r_6.$$

Slijedi

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_1^2\pi}{r_2^2\pi} = \frac{\frac{a^2}{16\sin^2 x}}{\frac{a^2}{16\sin^2 y}} = \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x},$$
$$\frac{P_3}{P_4} = \frac{\frac{b^2}{16\sin^2 z}}{\frac{b^2}{16\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 z},$$
$$\frac{P_5}{P_6} = \frac{\frac{c^2}{16\sin^2 y}}{\frac{c^2}{16\sin^2 z}} = \frac{\sin^2 z}{\sin^2 y}.$$

Time smo dokazali da je

$$\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{P_3}{P_4} \cdot \frac{P_5}{P_6} = \frac{\sin^2 y}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 z} \cdot \frac{\sin^2 z}{\sin^2 y} = 1.$$

Primijetimo da je rezultat neovisan o tome koju smo površinu označili kao prvu, važno je samo da idu ciklički, da su susjedne u nizu.

Zadatak B-3.4.

Kolika je površina trokuta kojemu je zbroj kvadrata duljina stranica jednak 2016, a zbroj kotangensa kutova 18 ?

Rješenje.

Vrijedi

$$a^2+b^2+c^2=2016 \text{ i } \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=18.$$

Prema poučku o kosinusu,

$$\begin{aligned}
a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\\
b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta\\
c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,
\end{aligned}$$

vrijedi

$$a^2+b^2+c^2=2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta+2ab\cos\gamma.$$

Iz sljedećih formula za površinu

$$P=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{ac\sin\beta}{2}$$

slijedi

$$ab=\frac{2P}{\sin\gamma},\quad ac=\frac{2P}{\sin\beta},\quad bc=\frac{2P}{\sin\alpha}.$$

Slijedi da je

$$a^2+b^2+c^2=4P\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+4P\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+4P\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=4P(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)$$

pa je

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\left(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\right)}=\frac{2016}{4\cdot 18}=28 \text{ kv.jedinica.}$$

Zadatak B-3.5.

Svaka stranica konveksnog šesterokuta podijeljena je točkama na n dijelova. Među tim točkama biramo vrhove trokuta. Koliko je različitih trokuta time određeno?

Rješenje.

Na svakoj je stranici $n-1$ točaka kojima je stranica podijeljena na n dijelova.
Odredimo broj trokuta koji imaju po dva vrha na istoj stranici šesterokuta. Stranicu biramo na 6 načina. Na njoj prvi vrh biramo na $n-1$ način, a drugi na $n-2$ načina, pa je ukupan broj parova $(n-1)\cdot(n-2)$. Kako par npr. AB i BA daje istu stranicu trokuta moramo taj broj podijeliti s 2. Tada je broj dužina određenih s dvije točke na istoj stranici šesterokuta jednak

$$6\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}=3(n-1)(n-2).$$

Za svaki taj izbor, treći vrh trokuta biramo od $n-1$ točke na nekoj od preostalih pet stranica, odnosno na $5(n-1)$ načina. Ukupan broj trokuta kojima su dva vrha na istoj stranici šesterokuta, a jedan na nekoj od preostalih jednak je

$$3(n-1)(n-2) \cdot 5(n-1) = 15(n-1)^2(n-2).$$

Odredimo sad broj trokuta koji imaju vrhove na različitim stranicama šesterokuta. Prvo izaberemo tri različite stranice šesterokuta na kojima su vrhovi trokuta. Prvu biramo na 6 načina, drugu na 5, treću na 4 načina što je ukupno $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ načina. Međutim, među njima su npr i trojke (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) koje predstavljaju isti izbor stranica. Stoga dobiveni broj moramo podijeliti sa 6, pa je ukupno 20 načina da izaberemo tri različite stranice šesterokuta. Na svakoj od te tri stranice biramo jedan vrh na $n-1$ načina. Dakle, za svaki od dobivenih 20 načina izbora stranica je $n-1$ izbor prvog vrha, a za svaki od njih je $n-1$ izbor drugog, te za svaki od prethodnih izbora je i $n-1$ izbor trećeg vrha što je ukupno

$$20 \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-1) = 20(n-1)^3.$$

Ukupan je broj trokuta

$$15(n-1)^2(n-2) + 20(n-1)^3 = 5(n-1)^2(7n-10).$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

Zadatak B-4.1.

Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz brojeva definiran s

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1 \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Odredite a_{801}.

Rješenje.

Vrijedi

$$a_2 = \sqrt{1-2+3} + 1 = \sqrt{2} + 1,$$
$$a_3 = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 2(\sqrt{2}+1) + 3} + 1 = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} - 2 + 3} + 1 = \sqrt{4} + 1 = 3,$$
$$a_4 = \sqrt{6} + 1,$$
$$a_5 = \sqrt{6 + 2\sqrt{6} + 1 - 2\sqrt{6} - 2 + 3} + 1 = \sqrt{8} + 1,$$
$$\ldots$$

Pokažimo da je $a_n = \sqrt{2(n-1)} + 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $a_1 = \sqrt{2(1-1)} + 1 = 0 + 1 = 1$.

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi $a_n = \sqrt{2(n-1)} + 1$. Dokažimo da je tada $a_{n+1} = \sqrt{2(n+1-1)} + 1 = \sqrt{2n} + 1$.

Iz početne rekurzije kojom je niz zadan, slijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1 = \text{ (prema pretpostavci indukcije)} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2(n-1)} + 1\right)^2 - 2\left(\sqrt{2(n-1)} + 2\right) + 3} + 1 \\ &= \sqrt{2(n-1) + 2\sqrt{2(n-1)} + 1 - 2\sqrt{2(n-1)} - 2 + 3} + 1 = \sqrt{2n} + 1. \end{aligned}$$

Kako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki n, slijedi da ona vrijedi i za sljedeći prirodan broj $n+1$, zaključujemo da $a_n = \sqrt{2(n-1)} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tada je $a_{801} = \sqrt{2(801-1)} + 1 = 41$.

Zadatak B-4.2.

Dana je funkcija $f(x) = a\cos x + b\sin x$, gdje su a i b realni brojevi. Ako postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, takvi da je $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ i $\dfrac{x_1 - x_2}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, onda je $a = b = 0$. Dokažite!

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$. Tada je i $a^2 + b^2 \neq 0$ pa vrijedi

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha),$$

gdje je $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Iz $f(x_1) = 0$ i $f(x_2) = 0$ i $a^2 + b^2 \neq 0$ slijedi $\sin(x_1 + \alpha) = 0$ i $\sin(x_2 + \alpha) = 0$, odnosno $x_1 + \alpha = m\pi$ i $x_2 + \alpha = n\pi$, za neke $m, n \in \mathbb{Z}$.

Međutim, tada je $\frac{x_1 - x_2}{\pi} = m - n$, odnosno cijeli broj, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, mora vrijediti $a = b = 0$.

Drugo rješenje.

Neka su f, x_1, x_2 kao u pretpostavci zadatka. Tada imamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a\cos x_1 + b\sin x_1 &= 0, \\ a\cos x_2 + b\sin x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Prvi slučaj. Ako je $a \neq 0$, $b = 0$, imamo sustav

$$\begin{aligned} a\cos x_1 &= 0, \\ a\cos x_2 &= 0, \end{aligned}$$

iz kojeg slijedi da je ili $a = 0$, ili je $\cos x_1 = \cos x_2 = 0$. Međutim, ovo drugo bi značilo da je $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + l\pi$, pa bi u tom slučaju vrijedilo $x_1 - x_2 = (k - l)\pi$, što je u kontradikciji s $\frac{x_1 - x_2}{\pi} \notin \mathbb{Z}$.

Dakle, ako je $b = 0$, mora biti i $a = 0$.

Analogno se vidi da vrijedi i obratno, ako je $a = 0$ nužno je i $b = 0$.

Drugi slučaj. Pretpostavimo da je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i promotrimo dani sustav.

Ako je $a \neq 0$, $b \neq 0$, tada $\cos x_1 = 0$ povlači da je i $\sin x_1 = 0$ (i obratno), što je nemoguće jer sinus i kosinus ne mogu istovremeno imati vrijednost nula. Analogno vrijedi i za drugu jednadžbu, dakle možemo zaključiti $\cos x_1 \neq 0$, $\cos x_2 \neq 0$.

Tada možemo podijeliti prvu jednadžbu sustava s $b\cos x_1$, a drugu s $b\cos x_2$. Slijedi

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{a}{b} = -\frac{\sin x_2}{\cos x_2}.$$

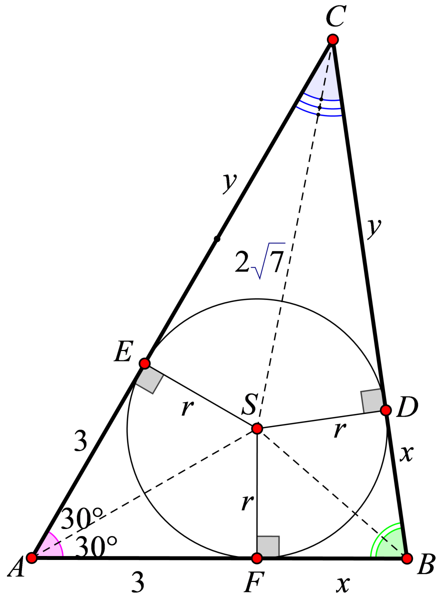
Iz toga slijedi da je $\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} x_2$ pa vrijedi $x_1 - x_2 = k\pi$, što je u kontradikciji s $\frac{x_1 - x_2}{\pi} \notin \mathbb{Z}$.

Prema tome, pretpostavka da su a i b različiti od nule je kriva, odnosno $a = b = 0$.

Zadatak B-4.3.

Trokutu ABC upisana je kružnica sa središtem u točki S. Kružnica dodiruje stranice trokuta u točkama $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{AC}$ i $F \in \overline{AB}$. Ako je $|AE| = 3\,\text{cm}$, $|CS| = 2\sqrt{7}\,\text{cm}$, a mjera kuta pri vrhu A je 60°, izračunajte površinu trokuta ABC.

Rješenje.



Kako je CS simetrala kuta, $\sphericalangle ECS = \sphericalangle DCS$, $\sphericalangle CES = \sphericalangle CDS = 90°$ i $\overline{CS}$ je zajednička stranica pa su trokuti CES i CDS sukladni prema poučku KSK. Tada je $|CE| = |CD| = y$.

Analogno zaključujemo i $|AF| = |AE| = 3$, $|BF| = |BD| = x$.

Neka je $r = |ES|$ polumjer upisane kružnice. Kako je AS simetrala kuta $\sphericalangle EAF$, vrijedi $\sphericalangle EAS = 30°$. Iz trokuta AES, koji je pola jednakostraničnog trokuta, slijedi $r = 3 \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Iz pravokutnog trokuta CES primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$y^2 = (2\sqrt{7})^2 - 3^2$, odnosno $y = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 8\,\text{cm}$.

Poluopseg trokuta ABC je $s = \frac{8+5+x+3+x}{2} = 8 + x$. Duljinu x računamo koristeći formule za površinu $P = r \cdot s$ i $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$:

$$\begin{aligned}
rs &= \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin 60° \\
\sqrt{3}(8+x) &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3+x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
8 + x &= 6 + 2x \\
x &= 2\,\text{cm}.
\end{aligned}$$

Stranice trokuta su $8\,\text{cm}$, $7\,\text{cm}$ i $5\,\text{cm}$, a površina je $P = rs = \sqrt{3}(8+2) = 10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Zadatak B-4.4.

Barba Ante je, tražeći način kako da zabavi unuke Ivu i Matu, pronašao tri kartice. Na prvoj kartici s jedne strane piše broj 1, a s druge broj 4. Na drugoj kartici s jedne strane piše broj 2, a s druge strane broj 4. Na trećoj kartici s jedne strane piše broj 3, a s druge opet broj 4. Barba Ante je odmah znao kako će zaposliti unuke na dulje vrijeme. Mlađemu je Mati rekao da slaže te tri kartice u niz, a školarac Ivo trebao je zapisivati troznamenkaste brojeve koje Mate slaganjem kartica dobiva i na kraju još izračunati zbroj svih zapisanih brojeva. Pri tome Mate slučajno bira karticu i njezinu stranu. Koliko najviše različitih troznamenkastih brojeva može Ivo zapisati i koliko iznosi njihov zbroj?

Rješenje.

Treba prebrojiti koliko se različitih troznamenkastih brojeva može napisati od brojeva 1,2,3,4,4,4. Promotrimo 4 slučaja:

1. slučaj. Troznamenkasti broj ima samo znamenke $1, 2, 3$. Tada Ivo može zapisati najviše 6 brojeva: $123, 132, 213, 231, 312, 321$. Njihov je zbroj jednak zbroju svih znamenaka jedinica + zbroj desetica$\times 10$ + zbroj stotica$\times 100$, odnosno $12 + 120 + 1200 = 1332$.

2. slučaj. Troznamenkasti broj ima samo jednu znamenku 4. Tada uz znamenku 4 može imati znamenke $1, 2$ ili $1, 3$ ili $2, 3$. Analogno prvom slučaju, različitih troznamenkastih brojeva sa znamenkama $4, 1, 2$ ima 6. Isto toliko ih ima ako Mate odabere kartice s brojevima $4, 1, 3$ ili $4, 2, 3$. Dakle, ukupno $3 \cdot 6 = 18$ mogućnosti. Zbroj svih takvih brojeva je $14 + 140 + 1400 + 16 + 160 + 1600 + 18 + 180 + 1800 = 5328$.

3. slučaj. Troznamenkasti broj ima dvije znamenke 4. Tada uz njih može imati još znamenku 1 ili 2 ili 3. Tri su različita troznamenkasta broja sa znamenkama $1, 4, 4$, a to su $144, 414, 441$. Isto toliko ih ima sa znamenkama $2, 4, 4$ odnosno $3, 4, 4$. Dakle, ukupno $3 \cdot 3 = 9$ mogućnosti. Zbroj svih takvih brojeva je $9 + 90 + 900 + 10 + 100 + 1000 + 11 + 110 + 1100 = 3330$.

4. slučaj. Troznamenkasti broj ima sve tri znamenke 4. Postoji samo jedan takav broj, 444.

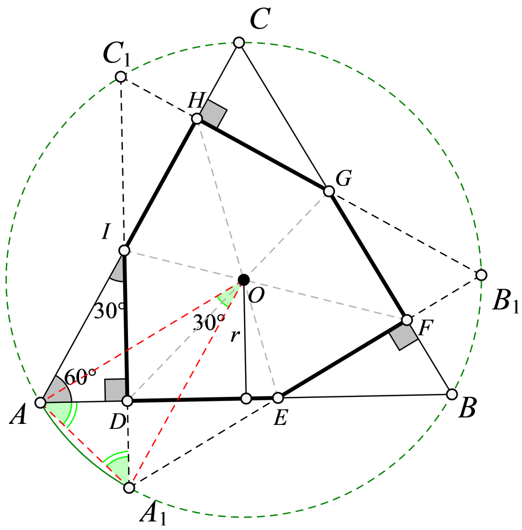
Ukupan broj traženih troznamenkastih brojeva koje Ivo može zapisati je $6 + 18 + 9 + 1 = 34$.

Njihov ukupan zbroj je $1332 + 5328 + 3330 + 444 = 10434$.

Zadatak B-4.5.

Jednakostraničan trokut površine P zarotiramo u njegovoj ravnini za $30°$ oko težišta. Kolika je površina presjeka polaznog trokuta i trokuta dobivenog rotacijom?

Rješenje.



Vrhove polaznog trokuta označimo s A, B, C, vrhove rotiranog trokuta s A_1, B_1, C_1, težište s O, a točke presjeka stranica dvaju trokuta s D, E, F, G, H, I. Lik dobiven presjekom trokuta je šesterokut $DEFGHI$.

Zbog rotacije vrijedi $\sphericalangle AOA_1 = 30°$, a $\sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle OA_1A = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. OA je simetrala kuta $\sphericalangle CAB$, OA_1 je simetrala kuta $\sphericalangle C_1A_1B_1$. Vrijedi $\sphericalangle DAA_1 = \sphericalangle DA_1A = 45°$.

Slijedi $|AD| = |A_1D|$, a $\sphericalangle ADI = \sphericalangle ADA_1 = 90°$. Točka D nalazi se na simetrali stranice $\overline{AA_1}$, odnosno kuta $\sphericalangle AOA_1$, jer je trokut AOA_1 jednakokračan. Analogno se pokaže i da su točke F i H na simetrali kuta $\sphericalangle BOB_1$, odnosno $\sphericalangle COC_1$ te da su kutovi u F i H pravi kutovi.

Prema KSK poučku slijedi $\triangle OAD \cong \triangle OA_1D \cong \triangle OBF \cong \triangle OB_1F \cong \triangle OCH \cong \triangle OC_1H$.

(Kutovi pri vrhu O su 15°, pri vrhovima A, B, C, A_1, B_1, C_1 su 30°, a stranice $|OA|$, $|OA_1|$, $|OB|$, $|OB_1|$, $|OC|$ i $|OC_1|$ su sve jednake polumjeru opisane kružnice.)

Zaključujemo da je $|AD| = |A_1D| = |BF| = |B_1F| = |CH| = |C_1H|$.

Iz toga prema poučku KSK slijedi da su i trokuti $\triangle ADI$, $\triangle A_1DE$, $\triangle BFE$, $\triangle B_1FG$, $\triangle CHG$, $\triangle C_1HI$ sukladni (kutovi su im $30°, 60°, 90°$).

Slijedi $|DE| = |EF| = |FG| = |GH| = |HI| = |ID|$.

Prema tome, šesterokut $DEFGHI$ je jednakostraničan i sastoji se od 6 trokuta s istom visinom r (polumjer trokutu upisane kružnice) i istom osnovicom (stranicom šesterokuta). Promotrimo jedan takav trokut, $\triangle DEO$. Površina šesterokuta je

$$P_6 = 6 \cdot P_\triangle(DEO) = 6 \cdot \frac{|DE|r}{2} = 3|DE|r.$$

Neka je stranica početnog trokuta a. Tada je

$$|AD| + |DE| + |EB| = |AB| = a$$
$$|DE| = |DI| = |AD|\sqrt{3},\ |EB| = 2|BF| = 2|AD|$$
$$|AD| + |AD|\sqrt{3} + 2|AD| = a \Rightarrow |AD| = \frac{a}{3+\sqrt{3}}$$
$$|DE| = \frac{a}{3+3\sqrt{3}}\sqrt{3} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2},\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$
$$P_6 = 3 \cdot \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1) = P(\sqrt{3}-1).$$