Pripreme 2015 (8. i 1. r.) – Diofantske jednadžbe i djeljivost

sastavila: Vanja Wagner

Metoda faktorizacije

1. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
   (a) $3xy + 2y = 7$
   (b) $2x^2 + xy - 3y^2 = 17$.
2. (županijsko 2012.) Nađite sve $n \in \mathbb{N}$ t.d. $5^n + 2^{n+1} \cdot 3^n = 9^n + 4^n$.
3. Za koje cijele brojeve x je $2x^2 - x - 36$ kvadrat prostog broja?
4. Za koje prirodne brojeve n je $n^2 - 4n + 16$ kvadrat nekog prirodnog broja?

Zadaci za vježbu:

1. Nađite sve $n, p \in \mathbb{N}$, p prost t.d. $n^3 + 7n^2 + 14n + 8 = 6p$.
2. (županijsko 2014.) Odredite sve $x, y \in \mathbb{N}$ t.d. $x^4 + 68 = 4y^4$.
3. Pokažite da jednadžba $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 5$ nema rješenja u $\mathbb{Z}$.
4. (državno 2012.) Odredite sve $x, y \in \mathbb{Z}$ t.d. $6x^2y^2 - 4y^2 = 2012 - 3x^2$.
5. (županijsko 2012.) Koliko ima $x, y \in \mathbb{Z}$ t.d. $(x+y+2012)^2 = x^2+y^2+2012^2$.

Metoda kvocijenata

1. Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ t.d. $n + 2$ dijeli $n^4 + 2$.
2. Odredite sve dvoznamenkaste brojeve koji su 3 puta veći od produkta svojih znamenaka.
3. Odredite sve $a \in \mathbb{Z}$ t.d. $\frac{a^3-a^2-a-1}{3a-1} \in \mathbb{Z}$.
4. Nađite sve četveroznamenkaste brojeve kojima su prve dvije znamenke jednake i posljednje dvije znamenke jednake i koji je kvadrat prirodnog broja.

Zadaci za vježbu:

1. (HMO 2013.) Odredite $a, b \in \mathbb{N}$ t.d. a^2+b dijeli a^2b+a i b^2-a dijeli ab^2+b.
2. (državno 2015.) Odredite sve $d, n \in \mathbb{N}$ t.d. d dijeli n i $dn+1$ dijeli d^2+n^2.
3. Riješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}$.

Metoda ostataka

1. Odredite rješenja jednadžbi u skupu prirodnih brojeva:

(a) $x^2 + 10y = 1234567$

(b) $n^4 + 16m = 7993$

(c) $x^2 + y^2 = 2006$.

2. (županijsko 2013.) Pokažite da jednadžba $x^2 = 2y^2 - 75y + 5$ nema cjelobrojnih rješenja.

3. Ako je $A = 3^{105} + 4^{105}$ dokažite da $7|A$ i odredite ostatke od A pri dijeljenju s 11 i 13.

Zadaci za vježbu:

1. Pokažite da jednadžba $19x^3 - 84y^2 = 1984$ nema cjelobrojnih rješenja.

2. Odredite sve proste brojeve p t.d. je $2^p + p^2$ prost broj.

3. Postoje li $m, n \in \mathbb{N}$ t.d. $n! + 5m^2 = 147926$? $(n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n)$

4. Odredite $x, y \in \mathbb{N}$ t.d. $5^x + y^4 = 194482$.

5. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $3^x - 2^y = 5$?