Pripreme 2015 –Teroija brojeva

sastavio: Marijan Polić

Oznaka (eXX) označava da je zadatak iz knjige Arthura Engela *Problem Solving Strategies*.

1. zadatak: (e8) Neka je $A = 3^{105} + 4^{105}$. Dokažite da $7|A$ i odredite ostatke pri dijeljenju A sa 11 i sa 13.

2. zadatak: (e9) Dokažite da brojevi $3n - 1$, $5n \pm 2$, $7n - 1$, $7n - 2$ i $7n - 3$ ne mogu biti potpuni kvadrati.

3. zadatak: (e16) Pretpostavimo da su za prirodan n, $2n + 1$ i $3n + 1$ potpuni kvadrati. Dokažite da tada $5n + 3$ nije prost.

4. zadatak: (e18) Neka je dano da $9|a^2 + b^2 + c^2$. Dokažite da 9 dijeli bar jedan od brojeva $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$ i $a^2 - c^2$.

5. zadatak: (e19) Dokažite da za n paran, $323|20^n + 16^n - 3^n - 1$.

6. zadatak: (e20) Dokažite da 121 ne dijeli $n^2 + 3n + 5$.

7. zadatak: (e32) Dokažite da među $n + 1$ prirodnih brojeva manjih od $2n$ postoje dva koji su relativno prosti.

8. zadatak: (e33) Dokažite da među $n + 1$ prirodnih brojeva manjih od $2n$ postoje p i q takvi da $p|q$.

9. zadatak: (e34) Za n cijeli broj, dokažite da su $\frac{12n+1}{30n+2}$ i $\frac{21n+4}{14n+3}$ neskrativi.

10. zadatak: (e35) Pokažite da je najveći zajednički djelitelj brojeva $2n+3$ i $n+7$ jednak 1 za $n \not\equiv 4 (\text{mod } 11)$, odnosno 11 za $n \equiv 4 \pmod{11}$.

11. zadatak: (e41) Dokažite

(a) $13|a + 4b \Rightarrow 13|10a + b$.

(b) $17|3a + 2b \Rightarrow 17|10a + b$.

(c) $19|3a + 7b \Rightarrow 19|43a + 75b$.

12. zadatak: (e51) Neka je $p = p_1 p_2 \cdots p_n$, $n > 1$, produkt prvih n prostih brojeva. Pokažite da $p+1$, $p-1$ ne mogu biti potuni kvadrati.

13. zadatak: (e54) Odredite minimalan pozitivan cijeli n takav da $999999 \cdot n = 11 \cdots 11$.

14. zadatak: (e55) Odredite minimalan prirodan broj n takav da se pomicanjem vodeće znamenke na kraj dobije $\frac{3}{2}$ puta veći broj.

15. zadatak: (e61) Neka je $n > 2$, p prost, $\frac{2n}{3} < p < n$. Dokažite da $p \not| \binom{2n}{n}$.

16. zadatak: (e72) Sa kojim eksponentom se broj 2 pojavljuje u faktorizaciji broja $(n+1)(n+2)\cdots(2n)$ na proste faktore?

17. zadatak: (e82) Pokažite da postoji beskonačno mnogo složenih brojeva u nizu $1, 31, 331, 3331, \ldots$

18. zadatak: (e96) Dokažite da diofantska jednadžba $y^2 = x^3 + 7$ nema rješenja.

19. zadatak: Odredite sve prirodne brojeve n takve da $\phi(n)$ dijeli n.