RMM pripreme 2015 – Teorija brojeva

sastavio:Nikola Adžaga

Pellov(sk)e jednadžbe

1. zadatak: (?) Nađite sve baze b za koje je 111_b jednako nekom trokutastom broju T_n.

2. zadatak: (RMM 2011) Za prirodan broj $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, označimo s $\Omega(n)$ ukupan broj prostih djelitelja $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i$, računajući kratnost. Neka je $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (npr. $\lambda(12) = \lambda(2^2 3^1) = (-1)^{2+1} = -1$).
Dokaži sljedeće dvije tvrdnje:

(a) Postoji beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $\lambda(n) = \lambda(n+1) = +1$.

(b) Postoji beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

3. zadatak: (Viet Nam 1992.) Za prirodan broj n označimo s $f(n)$ broj djelitelja od n koji završavaju znamenkom 1 ili 9, a s $g(n)$ broj djelitelja n koji završavaju s 3 ili s 5. Dokaži da je $f(n) \geqslant g(n)$.

4. zadatak: (IMO shortlist 2002.) Postoji li prirodan broj m takav da jednadžba

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

ima beskonačno mnogo rješenja u prirodnim a, b, c?

---

5. zadatak: (Estonija 2009.) Nazovimo skup prirodnih brojeva *nezavisnim* ako su mu elementi relativno prosti u parovima, a *lijepim* ako je aritmetička sredina svakog njegovog nepraznog podskupa cijeli broj.

- Dokaži da za svaki prirodan n postoji n-člani skup prirodnih brojeva koji je nezavisan i lijep.
- Postoji li beskonačni skup prirodnih brojeva čiji je svaki nezavisni podskup lijep i koji, za svaki prirodan n, ima n-člani nezavisni podskup?

---

6. zadatak: Ako su a, b i c prirodni brojevi, mogu li sva tri broja $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$, $c^2 + a + b$ biti potpuni kvadrati?

7. zadatak: (APMO 2010.) Za prirodan broj n, postoji li n različitih prirodnih brojeva čiji je zbroj 2015. potencija prirodnog broja, a produkt 2016. potencija prirodnog broja?

---

8. zadatak: (Vojtech Jarnik 2002) Neka je $p > 3$ prost broj i $n = \dfrac{2^{2p} - 1}{3}$. Pokaži da n dijeli $2^n - 2$.

9. zadatak: (Rumunjski TST 2002) Neka je n prirodan broj, a S skup prirodnih a takvih da je $1 < a < n$ te $n \mid a^{a-1} - 1$. Ako je $S = \{n-1\}$, dokaži da je $n = 2p$ gdje je p prost broj.

Preostali zadaci

1. (Vojtech Jarnik 2003) Neka je $d(k)$ broj djelitelja prirodnog $k \in \mathbb{N}$. Dokaži da ni za koji $n_0 \in \mathbb{N}$, niz $(d(n^2+1))_{n=n_0}^{\infty}$ nije strogo monoton.
2. Neka je $f(n)$ funkcija definirana na prirodnim brojevima s $f(1) = 1$, te za $n > 1$, ako je $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ kanonska faktorizacija od n, onda je $f(n) = 1 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots a_k p_k$. Niz funkcija $f_k(n)$ sdefiniran je rekurzivno s $f_1(n) = n, f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$.

   Dan je prirodan broj a. Dokaži da postoji prirodan broj k_0 takav da $\forall k > k_0$ zbroj $f_k(a) + f_{k+1}(a)$ ne ovisi o k.
3. (RMM 2015.) Postoji li beskonačan niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots$ takav da su a_m i a_n relativno prosti ako i samo ako je $|m - n| = 1$?
4. (RMM 2013.) Dokaži da postoji beskonačno prirodnih n takvih da n dijeli $2^{2n+1} + 1$, ali ne dijeli $2^n + 1$.