# RMM pripreme 2015 – Kombinatorika

sastavio: Matija Bašić

**1. zadatak:** (Turnir gradova 1983) Tlocrt marsovske podzemne željeznice može se prikazati kao zatvorena samopresijecajuća krivulja koja u svakoj točki presijeca samu sebe najviše jednom. Dokaži da je moguće konstruirati tunel tako da vlak naizmjence prolazi iznad, pa ispod presijecajućih dijelova tunela.

**2. zadatak:** (Peru 2007) Neka je $T$ skup od 2015 točaka u ravnini, pri čemu nikoje tri nisu kolinearne. Neka je $P$ bilo koja točka iz skupa $T$. Dokaži da je broj trokuta kojima su vrhovi u skupu $T$ i koji u svojoj unutrašnjosti sadrže točku $P$, paran.

**3. zadatak:** (Turnir gradova 1986) Trideset učenika jednog razreda odlučilo je da će se međusobno posjećivati. Svaki učenik može posjetiti nekoliko drugih učenika tijekom jedne večeri, ali mora ostati kod kuće ako te večeri netko posjećuje njega. Odredi minimalan broj večeri potreban kako bi svaki učenik posjetio svakog drugog učenika.

**4. zadatak:** (Vojtech Jarnik 2000) Odaberimo proizvoljnih $n$ vrhova pravilnog $2n$-terokuta i obojimo ih crveno. Preostale vrhove obojimo plavo. Dokaži: poredamo li duljine svih dužina koje spajaju dva crvena vrha u nepadajući niz, te isto tako duljine svih dužina koje spajaju dva plava vrha, dobivamo iste nizove.

**5. zadatak:** (Vojtech Jarnik 2002) Brojevi $1, 2, \ldots, n$ su pridruženi vrhovima pravilnog $n$-terokuta proizvoljnim redom. Za svaku stranicu mnogokuta izračunamo umnožak dva broja u njenim krajnjim točkama i zbrojimo sve umnoške. Koliko iznosi najmanji mogući zbroj?

## Zadaci za samostalan rad

1. (Kina 2013) Neka je $n$ prirodni broj. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ neprazni konačni skupovi za koje vrijedi $|A_i \Delta A_j| = |i - j|$ za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odredi minimalnu moguću vrijednost zbroja $|A_1| + \ldots + |A_n|$.

   *Oznaka* $X \Delta Y$ *označava* $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

2. (Rumunjska 2003) U jednoj školi $2n$ učenika je samostalno odlučilo organizirati natjecanje. Svaki učenik je predložio jedan zadatak, te su nakon toga podijelili $2n$ zadataka tako da je svatko dobio jedan zadatak. Natjecanje je *pošteno* ako postoji $n$ učenika koji su dobili zadatke predložene od preostalih $n$ učenika. Odredi broj poštenih natjecanja.

3. (Koreja, 2014) Oko okruglog stola stoji $n$ učenika različitih imena. Na početku su učenicima podijeljene kartice s imenima na proizvoljan način. Učenici ponavljaju sljedeći postupak:

   *svaki učenik koji drži karticu sa svojim imenom istupa iz kruga, a preostali učenici prosljeđuju karticu koju drže učeniku desno od sebe.*

   Odredi broj početnih raspodjela kartica s imenima za koje će nakon četiri ponavljanja postupka preostati neki učenici oko stola.

4. (USAMO 1999) Slavko i Orko igraju igru na ploči $2000 \times 1$. Igrači naizmjence upisuju slovo $S$ ili slovo $O$ u prazno polje ploče. Igrač koji prvi postigne da u tri uzastopna polja ploče piše $SOS$ pobjeđuje. Ako su sva polja popunjena i nigdje ne piše $SOS$, rezultat je izjednačen. Dokaži da onaj igrač koji igra drugi ima pobjedničku strategiju.

5. (Kina 1994) Neka je $n$ prirodni broj. Dokaži identitet

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

6. (Vojtech Jarnik 2013) Neka su $n$ i $k$ prirodni brojevi. Izračunajte sumu

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k}.$$

7. (SAD 1998) Neka je $n$ prirodni broj i $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za niz $A_1, \ldots, A_n$ podskupova skupa $S$ i permutaciju $\pi$ skupa $S$ definiramo *dijagonalni skup*

$$D_\pi(A_1, \ldots, A_n) = \{k \in S : k \notin A_{\pi(k)}\}.$$

   Odredi maksimalan broj različitih skupova koji se pojavljuju kao dijagonalni skup za jedan odabir skupova $A_1, \ldots, A_n$.

8. (USAMO 2010) Oko okruglog stola stoji $n$ učenika, jedan iza drugog. Učenici imaju visine $h_1 < h_2 < \ldots < h_n$. Ako učenik visine $h_k$ stoji iza učenika visine $h_{k-2}$ ili manje, ta dva učenika smiju zamijeniti mjesta. Dokaži da nije moguće napraviti više od $\binom{n}{3}$ zamjena.

9. (Shortlist 2000) Neka su $p$ i $q$ relativno prosti prirodni brojevi. Za podskup $S$ skupa prirodnih brojeva kažemo da je *idealan* ako je $0 \in S$ i za svaki element $n \in S$ brojevi $n + p$ i $n + q$ pripadaju $S$. Odredi broj idealnih podskupova.