# RMM pripreme 2015 – Algebra

sastavio: Kristina Ana Škreb

**1. zadatak:** (Rumunjska 2015) Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $a+b+c = 1$. Dokaži da je

$$\frac{bc+a+1}{a^2+1} + \frac{ca+b+1}{b^2+1} + \frac{ab+c+1}{c^2+1} \leqslant \frac{39}{10}.$$

**2. zadatak:** (Vijetnam 1992) Neka je $f(x)$ nekonstantni polinom s realnim koeficijentima. Dokaži da za svaki $c > 0$ postoji prirodan broj $n_0$ koji zadovoljava sljedeći uvjet:

*Za svaki polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima i vodećim koeficijentom 1 koji je stupnja barem $n_0$ broj cijelih brojeva $a$ za koje je*

$$|f(P(a))| \leqslant c$$

*nije veći od stupnja od $P$.*

**3. zadatak:** (Vijetnam 1998) Nađi sve polinome $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom 1 koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: postoji beskonačno mnogo iracionalnih brojeva $\alpha$ takvih da je $P(\alpha) \in \mathbb{N}_0$.

**4. zadatak:** (Vijetnam 2000) Dan je $k \in \mathbb{N}$. Definiramo niz brojeva $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ na sljedeći način:

(i) $x_1 = 1$,

(ii) za $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}$ je najmanji prirodan broj koji ne pripada skupu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1 + k, x_2 + 2k, \ldots, x_n + nk\}$.

Pokaži da postoji realan broj $\alpha$ takav da je $x_n = \lfloor n\alpha \rfloor$ za sve $n \geqslant 1$.

**5. zadatak:** (Bjelorusija 2015) Postoje li $a, b \in \mathbb{R}$ i surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$f(f(x)) = bxf(x) + a$$

za sve $x \in \mathbb{R}$?

**6. zadatak:** (Koreja 2013) Dan je prirodan broj $n$ i $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekcija. Definirani su skupovi $A, B, C, D$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
A &= \{i : i > f(i)\} \\
B &= \{(i,j) : i < j \leqslant f(j) < f(i) \quad \text{ili} \quad f(j) < f(i) < i < j\} \\
C &= \{(i,j) : i < j \leqslant f(i) < f(j) \quad \text{ili} \quad f(i) < f(j) < i < j\} \\
D &= \{(i,j) : i < j \quad \text{i} \quad f(i) > f(j)\}.
\end{aligned}$$

Dokaži da je $|A| + 2|B| + |C| = |D|$.

**7. zadatak:** (Rumunjska 2014) Dani su prirodni brojevi $n \geqslant m \geqslant 4$ i $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ podskup od $\{1, 2 \dots, n\}$ takav da za sve $a, b, \in A$, $a \neq b$ vrijedi

$$a + b \leqslant n \implies a + b \in A.$$

Dokaži da je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

**8. zadatak:** (Tajland 2013) Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje je

$$(x^2 + y^2) f(xy) = f(x) f(y) f(x^2 + y^2)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Ostali izabrani zadaci

1. (Vijetnam 2004) Nađi sve realne brojeve $\alpha$ za koje postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava jednadžbu

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + \alpha y$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

2. (Vijetnam 2005) Neka su $a, b, c > 0$. Dokaži da je

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geqslant \frac{3}{8}.$$

3. (RMM 2015) Postoji li niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takav da su $a_m$ i $a_n$ relativno prosti ako i samo ako je $|m - n| = 1$.

4. (Bjelorusija 2015) Pronađi sve parove polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ s realnim koeficijentima za koje vrijedi

$$P(x^2) = P(x)Q(1 - x) + P(1 - x)Q(x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.