Pripreme 2015 – Polinomi i nizovi

sastavio: Miljen Mikić

1. zadatak: Nađite polinom trećeg stupnja s vodećim koeficijentom 2 ako njegove nultočke zadovoljavaju jednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} &= 2, \\ \frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3} &= 4, \\ \frac{1}{x_1x_2x_3} &= 8. \end{aligned}$$

2. zadatak: Ako polinom s cjelobrojnim koeficijentima poprima za tri različite cjelobrojne vrijednosti vrijednost 2, dokažite da onda ni za koji cijeli broj ne poprima vrijednost 3.

3. zadatak: Dokažite ako polinom

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

s cjelobrojnim koeficijentima poprima neparne vrijednosti za $x = 0$ i $x = 1$, tada jednadžba $P(x) = 0$ ne može imati cjelobrojnih rješenja.

4. zadatak: Nađite sve realne pozitivne korijene jednadžbe

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0, n \in \mathbb{N}.$$

5. zadatak: Dokažite da ne postoji polinom

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

takav da su $P(0), P(1), P(2), \ldots$ svi prosti brojevi.

6. zadatak: (IMO 1993) Neka je $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, gdje je $n > 1$ cijeli broj. Dokažite da se $f(x)$ ne može prikazati kao produkt dva polinoma od kojih svaki ima sve cjelobrojne koeficijente i stupanj barem 1.

7. zadatak: Niz je zadan na sljedeći način: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2+1}$, za $n \geq 1$. Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

8. zadatak: (HMO 2012) Zadan je niz realnih brojeva:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 1, \\ x_n &= \sqrt{\frac{n}{2} + x_{n-1}x_{n-2}}, \text{ za } n \geq 2. \end{aligned}$$

Postoji li realni broj A takav da je $An < x_n < An + 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$?

Zadaci za samostalan rad

1. (IMO 1974) Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima, različit od konstante. Označimo s $n(P)$ broj svih različitih cijelih brojeva k za koje je $[P(k)]^2 = 1$. Dokažite da je $n(P) - s(P) \leq 2$, gdje je $s(P)$ stupanj polinoma P.

2. Niz $a_0, a_1, a_2 \dots$ je takav da za sve nenegativne m, n $(m \geq n)$ vrijedi
$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}.$$
Ako je $a_1 = 1$, nađite a_{2015}.

3. (HMO 2011) Neka su a i b relativno prosti prirodni brojevi različiti od 1. Definiran je niz
$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}} \text{ za } n \geq 3.$$
Dokažite da niti jedan član x_n ovog niza, osim prva dva, nije prirodni broj.