Metoda površina

Vlatko Crnković

22.11.2015.

Uvod

Metoda površina je metoda dokazivanja geometrijskih identiteta pomoću poznatih iznosa površina nekih geometrijskih likova. Podsjetimo se nekih formula za površine trokuta.

Formula 1.

$$P = \frac{a \cdot V_a}{2} = \frac{b \cdot V_b}{2} = \frac{c \cdot V_c}{2}$$

Formula 2.

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Formula 3.

$$P = S \cdot r$$

Formula 4.

$$P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Primjeri

1. Oko kružnice polumjera $r = 12\ cm$ opisan je trokut kojemu je omjer duljina stranica jednak $a : b : c = 4 : 13 : 15$. Koliki je polumjer R tom trokutu opisane kružnice ?

2. Dokažite da je površina trokuta kojemu su duljine visina jednake V_a, V_b i V_c jednaka

$$P = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c})(-\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c})(\frac{1}{V_a} - \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c})(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_c})}}$$

3. Duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost $a - b = b - c$. Dokažite da je polumjer r tom trokutu opisane kružnice jednak jednoj trećini visine V_b.

Zadatci

1. Ako su V_a, V_b i V_c duljine visina trokuta, a r duljina radijusa trokutu upisane kružnice, dokaži da je

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}$$

2. Dokaži da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli stranicu nasuprot tog kuta u omjeru druge dvije stranice tog trokuta.

3. Dokažite da zbroj udaljenosti bilo koje unutarnje točke jednakostraničnog trokuta od njegovih stranica ne ovisi o izboru te točke.

4. U trokutu $\triangle ABC$ na stranici $\overline{BC}$ uzeta je točke D takva da $|BD| : |DC| = 1 : 2$. U kojem omjeru težišnica $\overline{CE}$ dijeli dužinu $\overline{AD}$.

5. Dvije su visine trokuta duge $12\ cm$ i $20\ cm$. Dokaži da je duljina treće visine manja od $30\ cm$.

6. Unutar paralelograma $ABCD$ dana je točka E. Dokaži da je $P_{ABE} + P_{CDE} = P_{ADE} + P_{CBE}$.
7. Ako je najdulja stranica trokuta duga 5 cm, a najkraća 1 cm, koju najveću površinu može imati taj trokut ?
8. Dokaži da površina trokuta nije veća od polovine umnoška duljina bilo kojih dviju stranica.
9. Na srednjici trapeza $ABCD$ odabere se po volji neka točke E. Dokaži da je $P_{ABE} + P_{CDE} = P_{ADE} + P_{CBE}$.
10. U konveksnom peterokutu $ABCDE$ je $BC||AD$, $CD||BE$, $DE||AC$ i $AE||BD$. Dokažite da je tada i $AB||CE$.
11. Na težišnici $\overline{CD}$ trokuta $\triangle ABC$ odavere se točka E po volji. Pravsi AE i BE sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u točkama M i N redom. Dokaži da trokuti $\triangle AMC$ i $\triangle BCN$ imaju jednaku površinu.

Izvor zadataka: mala matematička biblioteka 2, male teme iz matematike