Kombinatorika

1 Logički zadaci

1. Od tri olovke jedna je crvena, jedna bijela i jedna plava. Označimo olovke sa A, B i C. Koje boje je koja olovka ako je točna samo jedna od tri tvrdnje. "A je crvena" , "B nije crvena" , "C nije plava".

2. Andrea, Ida, Mateja i Maja su kapetanice sportskih ekipa u svojoj školi. Postavljeno im je pitanje u kojim sportovima se natječu i one su dale sljedeće izjave : Andrea : "Majina ekipa igra rukomet, a Matejina košarku". Ida: "Maja igra odbojku, a Andrea košarku". Mateja : "Ida je glavna odbojkašica, a Andrea rukometašica ". Višnja : "Andrea predvodi odbojkašice, a Mateja igra badminton". Ispostavilo se da se djevojke nedovoljno poznaju. Naime svaka je rekla istinu samo za jednu sportašicu. Odgovorite u kojim ekipama su Andrea, Ida, Mateja i Maja.

3. U jednom selu žive civili i mafije. Civili uvijek govore istinu, a mafije uvijek lažu. Prolaznik naide na četiri stanovnika tog sela i upita ih: ”Jeste li vi mafije ili civili?” Prvi mu odgovori ”Mi smo svi mafije”. Drugi reče ”Ne, samo je jedan od nas mafija”. Treći kaže ”Među nama su točno dvije mafije ”. A četvrti jednostavno odgovori ”Ja sam civil”. Je li četvrti zaista civil?

4. U istom selu prisustvovao si suđenju. Optuženik ima pravo reći jednu rečenicu u svoju obranu i kaže: "Mafija je počinila taj zločin". Je li mu to pomoglo?

5. Još uvijek si u istom selu i zaboravio si koji je dan, pa si pitao četvero ljudi iz sela, i dobio ove odgovore: A: Jučer je bila srijeda. B: Sutra je nedjelja. C: Danas je petak. D: Prekjučer je bio četvrtak. Sve što trebaš znati je koliko je ljudi lagalo, zato ti neću reći. Koji je danas dan?

6. U istom selu žive i sluge. Sluga ne govori prvi. Civili uvijek govore istinu, mafije uvijek lažu, a istinitost izjave sluge je suprotna istinitosti izjave osobe koja je govorila prije njega. Troje ljudi iz tog sela je dalo redom izjave. Andrija kaže: ”Krunoslav je sluga”. Krunoslav kaže: ”Darijan nije sluga”. Darijan kaže: ”Andrija je sluga”. Sto su trojica koji su dala izjave?

7. Jednom davno živjela je princeza po imenu Pandora, koja je htjela pametnog muža. Zato bi proscima dala zagonetku. Prsten je stavila u jednu od 3 kutije: zlatnu, srebrnu ili brončanu. Na zlatnoj kutiji piše: "Prsten je u ovoj kutiji", na srebrnoj: "Prsten nije u ovoj kutiji", na brončanoj: "Prsten nije u zlatnoj kutiji". Ako znamo da je najviše jedna rečenica točna, u kojoj kutiji je prsten?

8. Nakon što je otvorio dobru kutiju, prosca je dočekalo neugodno iznenađenje: tri male kutijice, zlatna, srebrna i brončana. Naravno, u jednoj od njih se nalazi prsten. Na zlatnoj kutijici piše: "Prsten nije u srebrnoj kutijici", na srebrnoj: "Prsten nije u ovoj kutijici", na brončanoj: "Prsten je u ovoj kutijici". Ako znamo da je bar jedna istinita i bar jedna lažna rečenica, u kojoj kutijici je prsten?

9. Na n kartica napisane su rečenice: “Barem k rečenica lijevo od ove kartice je lažno.” za k = 0, 1, 2, . . . , n 1. Kartice su složene u nekom redoslijedu slijeva nadesno. Koliko najviše rečenica može biti istinito?

10. Trojica zatvorenika dobila su ponudu: čuvari će svakom od njih staviti jedan šešir na glavu i poredati ih u red. Zadnji vidi šešire prve dvojice, drugi šešir od prvog, a prvi nijedan. Na raspolaganju su 3 crna i 2 bijela šešira. Ako jedan pogodi koje boje mu je šešir, puste ih sve. Zadnji zatvorenik kaže "Ne znam", predzadnji također kaže "Ne znam", a prvi, koji ne vidi nijedan šešir, nakon toga kaže "Ja znam". Što zna?

11. Na gusarskom brodu je 5 gusara, i poredani su po jačini (od kapetana do malog od palube). Jednog dana gusari opljačkaju brod i nađu 100 zlatnika. Kapetan odlučuje kako će podijeliti zlatnike, a tada svi (uključujući i kapetana) glasaju za ili protiv takve raspodjele. Ako je barem pola glasova protiv, kapetana bace u more i sljedeći po redu po jačini radi raspodjelu zlatnika, i tako dok se ili neka raspodjela prihvati, ili ostane samo mali od palube. Pritom treba spomenuti da su gusari vrlo pohlepni, tj. da će glasati protiv ako mogu osigurati više ili jednako zlatnika ukoliko trenutnog kapetana bace. Koliko najviše zlatnika može osigurati kapetan?

12. Na stolu je 10 vrećica s po 10 jednakih novčića. Znaš kolika je težina običnog novčića i znaš da su u jednoj vrećici lažnjaci, te da je ta vrećica točno 1 g teža od ostalih. Imaš vrlo preciznu digitalnu vagu, ali samo jedno mjerenje. Kako ćeš ustanoviti koji novčići su lažni?

13. Na stolu je 20 novčića, 10 okrenutih na glavu i 10 na pismo. Imaš povez preko očiju i ne znaš razlikovati pisma i glave. Smiješ okretati sve novčiće koliko puta hoćeš. Trebaš podijeliti novčiće u 2 hrpe po 10 koje će međusobno imati jednaki broj glava i jednak broj pisama. Kako ćeš to učiniti? (Za one koji žele veći izazov: isti problem, samo što je k pisama (k ti je poznat), treba podijeliti u 2 (ne nužno jednake) hrpe koje imaju isti broj pisama).

14. Igra dvostruki šah ima ista pravila kao i obični, s jednom iznimkom: svaki igrač radi dva uzastopna poteza. Dokaži da Bijeli (koji prvi igra) ima negubitničku strategiju (odnosno može igrati tako da u svakom slučaju neće izgubiti).

2 Kombinatorni zadaci

1. Na nekom natjecanju iz matematike sudjelovalo je 32 učenika. Na natjecanju je bilo 5 zadataka, a nagrađeni su bili oni koji su točno riješili barem 2 zadatka. Na kraju natjecanja, nagrade je primilo 8 učenika. Dokaži da postoji zadatak koji je točno riješilo najviše 12 učenika.

2. Na šahovskom turniru sudjelovala su dva igrača iz grada A i nekoliko igrača iz grada B. Svaka dva igrača (bez obzira jesu li iz istog grada ili nisu) međusobno su odigrala točno jednu partiju. Igrači iz grada A zajedno su osvojili 8 bodova, a svaki je igrač iz grada B osvojio jednak broj bodova (U partiji šaha pobjednik dobiva 1 bod, gubitnik 0 bodova, a ako partija završi neriješeno, onda svaki igrač dobiva po pola boda). Koliko je igrača iz grada B moglo sudjelovati na turniru?

3. Koliko najviše kraljeva možemo postaviti na šahovsku ploču da se međusobno ne napadaju. A skakača? A kraljica? A lovaca?

4. Može li skakač (konj), pomičući se na propisan način, na standarnoj (8   8 crno-bijeloj) šahovskoj ploči odabrati takav put da pošavši od gornjeg lijevog kuta ploče dode na njezin donji desni kut, a da pritom na svako pojedino polje ploče dode točno jedanput (tj. da nijedno polje ne izostavi i da ni na jedno ne dođe više puta)?

3 Dirichletov princip

1. U ravnini imamo 6 točaka. Između svake 2 točke povučemo crvenu ili plavu dužinu. Dokaži da postoji trokut kojem su stranice iste boje. Moraju li postojati 2 takva trokuta? Dokaži.
2. Na nekoj zabavi bilo je n ljudi. Neki od njih međusobno su se rukovali. Dokaži da postoje 2 osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.
3. U nekom razredu je 20 učenika. Svaki je bio na ljetovanju u drugom gradu i poslao je razglednice 10 prijatelja iz razreda. Dokaži da postoje 2 učenika koji su razmijenili razglednice.
4. Dokaži da u $n+1$ brojeva uvijek postoje 2 čija je razlika djeljiva s n.
5. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji broj djeljiv s njim koji se sastoji samo od znamenaka 0 i 5.
6. Unutar jednakostraničnog trokuta stranice duljine 2 nacrtamo 5 točaka. Dokaži da je udaljenost neke 2 točke manja ili jednaka 1.
7. Koliko se najviše polja tablice 7   7 može označiti tako da ne postoje četiri označena polja čiji centri su vrhovi pravokutnika sa stranicama paralelnim stranicama tablice.
8. Neki šahist odlučio se 77 dana spremati za turnir. Svaki dan želi igrati barem jednu partiju, ali da ih ukupno ne odigra više od 132. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima će šahist ukupno odigrati točno 21 partiju.
9. Dano je 15 relativno prostih brojeva strogo između 1 i 2015. Dokaži da je barem 1 prost.
10. Mali Kristijan izrazito ne voli komarce, ali kako je ljeto, sve je puno komaraca te je smislio način za njihovo istrjebljenje. Na ploču 1 m   1 m postavio je primamljivu tvar koja privlači komarce, te kada komarci dođu blizu ploče, on ih zgnječi mlatilicom promjera 3.6 cm. Ako se u jednom trenutku nad pločom nalazi 10001 komarac, dokažite da ih barem 26 može zgnječiti jednim udarcem.
11. Izabrano je 51 različitih prirodnih brojeva manjih od 100. Dokaži da postoje 2 izabrana broja takva da je jedan višekratnik drugog.