# 2. i 3. razred 2015. – Kompleksni u geometriji

sastavio: Grgur Valentić

## Uvod

Izložit ćemo neke osnovne ideje metode rješavanja geometrijskih zadataka pomoću kompleksnih brojeva. No, prije svega, izvest ćemo formule koje se koriste u računu. Iako taj dio nije nužan za samo rješavanje zadataka, i zapravo vam uglavnom neće trebati, dobro je znati što se dešava u pozadini i biti u stanju sam izvesti neke formule ako ih zaboravite. Ipak, neke stvari ćemo podrazumjevati da čitatelj zna i nećemo ih izvoditi, a sažete su u sljedećem odlomku.

## Ono što već znate

- Trigonometrijski zapis kompleksnog broja $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, iako je dobro znati da možemo uzeti $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. $r$ udaljenost broja $z$ od ishodišta, tj. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ovdje napomenimo samo da možemo smatrati da je $e^{i\varphi}$ samo kraći zapis za $\cos\varphi + i\sin\varphi$, iako zapravo eksponencijalnu funckiju možemo definirati na kompleksnim brojevima, pa ovaj zapis ima i "dublji" smisao.

- $|e^{i\varphi}| = 1, \forall\varphi \in \mathbb{R}$. Koristit ćemo oznaku za jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravnini $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

- $e^{i\pi} = -1$, odnosno $e^{2i\pi} = 1$. Baš zato u zapisu $z = re^{i\varphi}$ "možemo uzeti $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$" - formalno, funckcija $e^{i\varphi} : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ je $2\pi$-periodična, dok je ista funkcija s domenom $[0, 2\pi\rangle$ bijekcija.

- $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Primjetite da ovo svojstvo vrijedi za realne eksponente, a sad su eksponenti čisto imaginarni. Za dokaz ovoga zapravo trebate raspisati trigonometrijske funckije i iskoristiti identite za sinus i kosinus zbroja. Ovaj identitet, iako naizgled trivijalan ima dobre posljedice. O kutu $\varphi$ sad možete ratmišljati kao o kutu u radijanima, odnosno, duljniji kružnog luka na jediničnoj kružnici. Identitet nam kaže: ako "prođemo" po jediničnoj kružnici prvo za $\alpha$, pa onda za $\beta$, to je kao da smo "prošli" odjednom za $\alpha + \beta$.

- Ako je $z = re^{i\alpha}, w = pe^{i\beta}$, tada je $zw = rpe^{i(\alpha+\beta)}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $z^n = r^n e^{ni\alpha}$, te vrijedi $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2k\pi}{n} + \frac{2i\alpha}{n}}$, za $k = 1, ..., n$, tj. kompleksni broj $z \neq 0$ ima $n$ različitih $n$-tih korijena koji čine pravilan $n$-terokut upisan u kružnicu radijusa $|z|^{\frac{1}{n}}$. Na kompleksnim brojevima ima smisla uvesti i realne, pa čak i kompleksne potencije, ali u to ovdje nećemo ulaziti.

- Ako je $z = x + iy = re^{i\varphi}$, definiramo broj konjugiran broju $z$, sa $\overline{z} = x - iy$. Lako se skiciranjem uvjeriti da vrijedi $\overline{z} = re^{-i\varphi}$. Također, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}, \overline{\overline{z}} = z$.

- Ako je $z = re^{i\varphi}$, tada je $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$, te $-z = e^{i\pi}re^{i\varphi} = re^{i(\pi+\varphi)}$.

- $z\overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$. Ako je $z \in \mathcal{S}$, tada je $|z| = 1$, pa vrijedi $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Ovo će se pokazati kao izrazito korisno u rješavanju zadataka.

## Izvodi nekih formula

Postavlja se pitanje kako opisati jednadžbu pravca, kružnice, rotacije, sjecišta pravaca i slično. Ovdje ćemo izdvojiti neke od tih izvoda. Napomenimo samo, točke u kompleksnoj ravnini označavat ćemo velikim slovima $A, B, C, \ldots$, a njihove pripadne koordinate $a, b, c, \ldots$, osim ako ne naglasimo drukčije. Dakle $a, b, c, \ldots \in \mathbb{C}$ i točke $A, B, C, \ldots$ su opisane "samo s jednom" koordinatom koja je kompleksan broj. $O$ će nam uvijek označavati ishodište, s pripadnom koordinatom 0.

**Rotacija:**
Kako zarotirati točku $B$ oko točke $A$ za kut $\varphi$, izražen u radijanima, u pozitivnom smjeru? Zamislimo prvo da je $A$ ishodište, odnosno $a = 0$. Tada, ako je $b = re^{i\beta}$, nakon rotacije, $B$ će pasti u $C$ s koordinatom $c = re^{i(\beta+\varphi)}$. Drugim riječima, $c = be^{i\varphi}$.
Ako $A$ nije u ishodištu, sjetimo se da je zbrajanje kompleksnih brojeva zapravo jednako zbrajanju vektora s početkom u ishodištu, odnosno formalno, ako su dane točke $D$ i $E$, tada točka $F$ konstruirana tako da vrijedi $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$ ima koordinatu $f = d + e$. Sad je lako vidjeti da rotiramo $B$ oko $A$ na način da uzmemo vektor $\overrightarrow{AB}$, zarotiramo ga za $\varphi$, te pribrojimo nazad na vektor $\overrightarrow{OA}$. Drugim riječima, ako je $C$ rotacija $B$ oko $A$ za $\varphi$, vrijedi $\boxed{c = (b-a)e^{i\varphi} + a}$.
Napomenimo još jednom dvije ključne stvari: zbrajanje vektora realizira se kao zbrajanje komplesknih brojeva, a rotacija vektora kao množenje brojevima iz $\mathcal{S}$.

**Jednadžba pravca:**
Nacrtajmo bilo koji pravac $p$ koji ne prolazi kroz ishodište, te označimo točku $S$ simetričnu od ishodišta obzirom na pravac $p$. Kako opisati sve točke s $p$? Primjetimo da točka $Z$ pripada pravcu $p \Leftrightarrow$ vrijedi $|OZ| = |SZ| \Leftrightarrow |z-0| = |z-s|$, pa jer su brojevi pozitivni $\Leftrightarrow |z|^2 = |z-s|^2 \Leftrightarrow z\overline{z} = (z-s)\overline{(z-s)} \Leftrightarrow z\overline{s} + s\overline{z} = s\overline{s}$, nakon djeljenja s $\overline{s} \neq 0 \Leftrightarrow z + \frac{s}{\overline{s}}\overline{z} = s$. Uz supstituciju $t = \frac{s}{\overline{s}}$, dobili smo jednadžbu pravca: $\boxed{z + t\overline{z} = s}$.
Primjetimo da $t$ i $s$ nisu nezavisni. Ako je $s = |s|e^{i\varphi}$, tada je $\overline{s} = |s|e^{-i\varphi}$, pa je $t = e^{2i\varphi}$. Dakle vrijedi $t \in \mathcal{S}$, i $t$ nam govori samo o nagibu pravca, te ćemo ga nadalje i zvati upravo "nagib pravca". Probajte konstruirati pravac $z + \overline{z} = 1$ i "pravac" $z + 2\overline{z} = 1$, tako što ćete raspisati $z = x + iy$. Primjetite da u prvom slučaju $t$ odogovara svom $s$-u dok u drugom slučaju ne: skup točaka koji zadovoljava drugu jednadžbu će ispasti samo jedna točka, $\frac{1}{3}$.
Ako pravac $p$ prolazi kroz ishodište, pokušajte se sami uvjeriti da će za svaki $t \in \mathcal{S}$, jednadžba $z + t\overline{z} = 0$ definirati jedan pravac. U daljnjem izvodu kutova između pravaca i ostalih formula, pretpostavit ćemo da nijedan od njih ne prolazi kroz ishodište, ali vrijedit će isti uvjeti i iste formule i ako neki od pravaca prolaze ishodištem.

**Kutevi između pravaca:**
*1. Paralelnost*: pravci $p_1$ i $p_2$ su paralelni ako odgovarajući $S_1$ i $S_2$ leže na istom pravcu. Odnosno, ako je $s_1 = |s_1|e^{i\varphi}$, a $s_2 = |s_2|e^{i\varphi}$ ili $s_2 = |s_2|e^{i(\pi+\varphi)}$. Ova dva slučaja odgovaraju redom slučajevima kad su $S_1$ i $S_2$ s iste, odnosno različite strane ishodišta. Tada vrijedi $t_1 = e^{2i\varphi}$, $t_2 = e^{2i\varphi}$ ili $t_2 = e^{2i\pi+2i\varphi} =$ (zbog periodičnosti) $= e^{2i\varphi}$. U oba slučaja smo dobili isti izraz, dakle pravci su paralelni ako i samo ako je $\boxed{t_1 = t_2}$.

*2. Okomitost*: slično, $p_1$ i $p_2$ će biti okomiti ako je polupravac na kojem leži $S_2$ dobiven rotacijom za plus ili minus $\frac{\pi}{2}$ u odnosu na polupravac na kojem leži $S_1$. Ako je $s_1 = |s_1|e^{i\varphi}$, dobivamo da je $s_2 = |s_2|e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$ ili $s_2 = |s_2|e^{i(-\frac{\pi}{2}+\varphi)}$. U oba slučaja je, opet zbog periodičnosti $t_2 = e^{i(\pi+\varphi)}$, odnosno, pravci su okomiti ako i samo ako je $\boxed{t_1 = -t_2}$.
*3. Proizvoljan kut*: Pravci $p_1$ i $p_2$ se sijeku pod kutem $\varphi$ u pozitivnom smjeru od $p_1$ do $p_2$, ako se pod istim kutem sijeku odgovarajući polupravci na kojima leže pripadni $S$-ovi, tj. ako je $s_1 = |s_1|e^{i\alpha}$, te $s_2 = |s_2|e^{i(\alpha+\varphi)}$, odnosno ako je $t_1 = e^{2i\alpha}$, te $t_2 = e^{2i(\alpha+\varphi)}$, odnosno, nakon dijeljenja, ako i samo ako je $\boxed{t_2 = t_1 e^{2i\varphi}}$.
Primjetite da nam je općenito orijentacija kutova bitna, osim naravno kod paralelnosti i okomitosti.

**Računanje jednadžbe pravca...**
*1. ... ako prolazi točkama A i B*: Slično kako postupamo u analitičkoj geometriji. Opća jednadžba pravca je $z + t\overline{z} = s$. Znamo da $a$ i $b$ zadovoljavaju tu jednadžbu, dakle vrijedi $a + t\overline{a} = s$ i $b + t\overline{b} = s$. Oduzimanjem jednadžbi računamo $t$, i sličnom manipulacijom $s$, pa dobivamo jednadžbu $\boxed{z - \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}\overline{z} = \frac{\overline{a}b - a\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}}$.
*2. ... ako prolazi točkom A i ima nagib t*: Pogađate: $\boxed{z + t\overline{z} = a + t\overline{a}}$.
*3. ... ako prolazi točkama A i B s jedinične kružnice*: Prisjetimo se važne formule, ako je $a \in \mathcal{S}$, tada je $\boxed{\overline{a} = \frac{1}{a}}$. Uvrštavanjem ovog izraza u opću jednadžbu pravca kroz $A$ i $B$ nalazimo puno prihvatljivije formule $\boxed{z + ab\overline{z} = a + b}$.

Postoje još mnoge formule koje je korisno znati na pamet ako se planirate ozbiljno baviti ovom metodom. No, ne morate to uzeti kao nešto obavezno - ako riješite dovoljnu količinu zadataka zapamtit ćete ih ovako ili onako. Bitno je samo da znate kako se one izvode pa lako izvedete neku kad vam zatreba, a još dosta "klasičnih" formula ćemo izvesti u narednim zadacima.

## Zadaci

1. U ravnini je dan trokut $ABC$. Zatim su konstruirani pozitivno orjentirani jednakostranični trokuti $ABD$, $BAE$, $CAF$, $DFG$, $ECH$ i $GHI$. Dokažite da je $E$ polovište dužine $\overline{AI}$.

2. Postavimo opisanu kružnice trokuta $ABC$ na jediničnu kružnicu $\mathcal{S}$ u kompleksnoj ravnini. Izrazite koordinatu ortocentra $H$ trokuta $ABC$ u terminima koordinata točaka $A$, $B$, i $C$.

3. Izračunajte težište trokuta $ABC$ u terminima koordinata točaka $A$, $B$ i $C$.

4. Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Neka su $H_a$, $H_b$, $H_c$ i $H_d$ redom ortocentri trokuta $BCD$, $CDA$, $DAB$ i $ABC$. Dokažite da je četverokut $ABCD$ sukladan četverokutu $H_aH_bH_cH_d$.

5. Zadan je konveksni četverokut $ABCD$. Označimo redom $A_1$, $B_1$, $C_1$ i $D_1$ težišta trokuta $BCD$, $CDA$, $DAB$ i $ABC$. Nadalje označimo $A_2$, $B_2$, $C_2$ i $D_2$ redom centralnosimetrične točke točkama $A$, $B$, $C$ i $D$ u odnosu na

točke $A_1$, $B_1$, $C_1$ i $D_1$. Dokažite da je četverokut $ABCD$ paralelogram ako i samo ako je $A_2B_2C_2D_2$ paralelogram.

6. U kružnicu $k$ s promjerom $AC$, upisan je četverokut $ABCD$. Neka se tangente iz $D$ i $B$ na $k$ sijeku u $M$, te neka se pravci $AB$ i $CD$ sijeku u $N$. Dokažite da je $MN \perp AC$.

7. Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Neka je $H$ ortocentar trokuta $ABD$, te neka su $B'$ i $D'$ točke redom simetrične točki $C$ obzirom na pravce $AB$ i $AD$. Dokažite da su $H$, $B'$ i $D'$ kolinearne.

8. Trokutu $ABC$ upisana kružnica sa središtem u $S$ dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom u $D$, $E$ i $F$. Neka je $M$ polovište stranice $\overline{BC}$, a $P$ presjek pravaca $FE$ i $DS$. Dokažite da su $A$, $P$ i $M$ kolinearne.

9. Trokutu $ABC$, s odgovarajućim kutevima $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$, upisana kružnica sa središtem u $S$ dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom u $D$, $E$ i $F$. Neka je $M$ polovište stranice $\overline{BC}$, $X$, odnosno $Y$, sjecište simetrale kuta $\beta$, odnosno $\gamma$, i pravca $DE$. Dokažite da je trokut $XYM$ jednakostraničan ako i samo ako je $\alpha = 60°$.

10. Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Dokažite da su nožišta visina iz $D$ na pravce $AB$, $CD$ i $DA$ kolinearna. Pravac na kojem leže zove se Simsonov pravac točke $D$ na trokut $ABC$. Dokažite da se četiri pravca, redom Simsonovovi pravci: točke $D$ na trokut $ABC$, točke $A$ na trokut $BCD$, točke $B$ na trokut $CDA$ i točke $C$ na trokut $DAB$ sijeku u istoj točki $F$. Odredite geometrijsko mjesto točaka $F$ ako točke $A$, $B$ i $C$ držimo fiksnima, a pustimo da $D$ bude proizvoljna točka kružnice.

## Rješenja

1. Iz uvjeta zadatka slijedi da je točka $D$ dobivena rotacijom za $60°$ točke $B$ oko točke $A$ u pozitivnom smjeru. U radijanima, to je $\frac{\pi}{3}$, te označimo $\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Slijedi

$$\boxed{d = (b-a)\varepsilon + a}$$

Identičnim argumentom, dobivamo

$$\boxed{e = (a-b)\varepsilon + b}$$

$$\boxed{f = (a-c)\varepsilon + c}$$

Slično, $g = (f-d)\varepsilon + d \Rightarrow$

$$\boxed{g = (2a-b-c)\varepsilon^2 + (b+c-2a)\varepsilon + a}$$

$h = (c-e)\varepsilon + e \Rightarrow$

$$\boxed{h = (b-a)\varepsilon^2 + (a+c-2b)\varepsilon + b}$$

Koordinatu točke $I$ označimo slovom $j$ da ne dođe do zabune s imaginarnom jedinicom. $j = (h-g)\varepsilon + g = (-3a+2b+c)\varepsilon^3 + (5a-4b-c)\varepsilon^2 + (2b+c-3a)\varepsilon + a$. Prmijetimo da je $\varepsilon^3 = e^{i\pi} = -1$, pa dobivamo

$$\boxed{j = (5a-4b-c)\varepsilon^2 + (2b+c-3a)\varepsilon + (4a-2b-c)}$$

Jedino što nam fali za dovršiti zadatak je kako provjeriti da je neka točka polovište neke dužine. Ovo se jednostavno izvodi: $M$ je polovište dužine $\overline{XY}$ ako je vektor $\overrightarrow{MY}$ upola manji nego $\overrightarrow{XY}$, drugim riječima, ako je $m - y = \frac{x-y}{2}$, a ovo vrijedi ako i samo ako je $\boxed{m = \dfrac{x+y}{2}}$.

$$\frac{a+j}{2} = \frac{1}{2}a(5\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 5) + \frac{1}{2}b(-4\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 2) + \frac{1}{2}c(-\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)$$

Obzirom da je $0 = \varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon+1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)$, te $0 \neq \varepsilon + 1$, slijedi $\boxed{\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0}$. Uvrštavanjem ovoga sad lako slijedi $e = \frac{a+j}{2}$, čime je tvrdnja pokazana.
Primjetite da nigdje nismo iskoristili uvjet da je $ABC$ trokut, ili čak da su točke $A, B, C$ različite. Ovdje je to bilo u redu, jer smo onda pretpostavili da ako su dvije točke jednake da je tada treća koja s njima čini jednakostraničan trokut također jednaka njima. U rješavanju zadataka ovo čak nije ni potrebno komentirati, ali dobro je imati na umu.

2. U redu, jasno je da nikada nećete vidjeti ovako postavljen zadatak na natjecanju. Ako vam se ne sviđa ovako zadan zadatak možete zamisliti da je zadan kao "dokažite da se visine sijeku u jednoj točki". Ovako je zadan da bude svojevrsan hint i uputa kako pristupiti većini zadataka koju rješavate ovom metodom.

   Dakle, postavimo opisanu kružnicu na $\mathcal{S}$ - primjetite da to smijemo bez smajnjenja općenitosti. Također smijemo pretpostaviti da je koordinata neke od točaka baš 1. To će nam možda nekad biti od koristi, ali kad je zadatak ovako "simetrično" postavljen u početnim točkama $A$, $B$ i $C$, to nekad i nije najbolja ideja.

   Kako izračunati $H$? Pa, kao sjecište visina $h_a$ i $h_b$. Kako dobiti formulu za visunu $h_a$? To je pravac okomit na $BC$ i prolazi točkom $A$. Budući da su $a, b, c \in \mathcal{S}$, slijedi da je pravac $BC$ dan s $z + bc\overline{z} = b + c$, pa mu je nagib jednak $bc$, pa je nagib pravca okomitog na njega jednak $-bc$. Dakle, jednadžba visine $h_a$ je

$$z - bc\overline{z} = a - bc\overline{a}$$

   Analogno, jednadžba visine $h_b$ je

$$z - ac\overline{z} = b - ac\overline{b}$$

   Kako dobiti sjecište dvaju pravaca? Pa $H$ je upravo jedina točka koja zadovoljava obje ove jednadžbe. Stoga ih oduzmimo i pišimo $h$ umjesto $z$. Također, sjetimo se da za $z \in \mathcal{S}$ vrijedi $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Dobivamo

$$\overline{h}c(a-b) = (a-b) + c(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})$$

Nakon dijeljenja s $(a-b)$ (obično kad radimo nešto simetrično po $a$ i $b$ i oduzmemo, znamo da ćemo moći podijeliti s tim izrazom) i malo sređivanja dobivamo

$$\overline{h} = \frac{1}{c} + \frac{a+b}{ab}$$

Konjugiranjem cijele jednadžbe i ponovom primjenom $z \in \mathcal{S} \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ slijedi

$$\boxed{h = a + b + c}$$

Kako se sad uvjeriti da $H$ ujedno leži na $h_c$? Jedan način bi bio da uvrstimo u jednadžbu pravca $h_c$ i uvjerimo da se da je zadovoljena. Drugi, mnogo elegantniji način i nužan za korištenje ove tehnike je argument simetrije: dobili smo da je izraz za $h$ simetričan obzirom na $a$, $b$ i $c$, prema tome da smo računali $H$ kao sjecište $h_a$ i $h_c$, dobili bismo isti izraz za $h$. Dakle, $H$ leži i na $h_c$.

3. Postupit ćemo slično kao kod ortocentra, samo uz malo "varanja". Iz vektorske interpretacije, mi znamo da za težište $T$ mora vrijediti $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Stoga, naslućujemo da će vrijediti $t = \frac{a+b+c}{3}$. Kako odrediti težišnicu $t_a$? Primjetite da sad nismo čak ni postavili $A, B, C$ na jediničnu kružnicu, iako se to inače gotovo uvijek radi. Znamo da je polovište dužine $BC$ točka s koordinatom $\frac{b+c}{2}$. Sad je $t_a$ naprosto pravac kroz $a$ i tu točku, odnosno pravac

$$z - \frac{a - \frac{b+c}{2}}{\overline{a} - \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}}\overline{z} = \frac{\overline{a}\frac{b+c}{2} - a\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}}{\overline{a} - \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}}$$

Dobro, ne izgleda divno, naročito ako bismo sad morali računati još neku težišnicu i tražiti presjek ta dva pravca. Ali mi se samo želimo uvjeriti da je ta jednadžba zadovoljena za $z = t = \frac{a+b+c}{3}$. Uvrstimo stoga taj $z$ te odmah pomnožimo s $\overline{a} - \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$, te sa 6. Treba pokazati da je

$$(a+b+c)(2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}) - (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})(2a - b - c) = 3\overline{a}(b+c) - 3a(\overline{b} + \overline{c})$$

Iako ovo nije teško sada sve raspisati i vidjeti da se strane podudaraju, pogledajmo kako si još možemo skratiti posao. Nakon izmnožavanja, svi članovi će biti oblika $a\overline{a}, a\overline{b}, a\overline{c}, ...$, dakle ukupno njih 9 različitih. Kako je i na lijevoj i na desnoj strani jednakosti lijevi pribrojnik jednak negativnom konjugatu desnoga, vidimo da ako provjerimo da se koeficijenti uz $a\overline{b}$ podudaraju, automatski ćemo dobiti da se podudaraju i oni uz $b\overline{a}$. Dodatno, kako je jednadžba simetrična u $b$ i $c$ preostaje samo provjeriti koeficijente uz $a\overline{a}$ $b\overline{b}$, $a\overline{b}$ i $b\overline{c}$. Sad se bez množenja lako vidi da izjednačavanjem koeficijenata po navedenim članovima dobivamo $0 = 0$, $0 = 0$, $-3 = -3$, $0 = 0$.

Po simetriji sada znamo da će nam $T$ ležati i na preostale dvije težišnice, dakle vrijedi

$$\boxed{t = \frac{a+b+c}{3}}$$

Dakle, ova formula za težište vrijedi uvijek, dok formula za ortocentar, $h = a + b + c$, vrijedi samo ako je trokut postavljen u jediničnu kružnicu.

Primjetimo još jednu zgodnu stvar koju smo pokazali kroz ovaj i prethodni zadatak: težište $T$, ortocentar $H$ i središte opisane $O$ kružnice trokuta leže na istom pravcu, i $T$ dijeli $\overline{OH}$ u omjeru $1:2$. Doista, za proizvoljan trokut, postavimo mu središte opisane kružnice $O$ u 0. Tad vrijede obje formule, za $H$ i $T$, koje smo izveli, odnosno vrijedi $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$.

4. Postavimo opisanu kružnicu četverokuta $ABCD$ kao jediničnu kružnicu $\mathcal{S}$. Tada znamo da za ortocentre vrijedi

$$\boxed{h_a = b + c + d}$$

$$\boxed{h_b = a + c + d}$$

te slično za preostala dva. Dakle,

$$|h_a - h_b| = |b - a| = |a - b|$$

Odnosno, duljine $|\overline{H_aH_b}|$ i $|\overline{AB}|$ su jednake. Po simetriji, isto svojstvo dobivamo za sve preostale stranice i po dvije dijagonale, dakle, spomenuti četverokuti su sukladni.

5. Ovdje nećemo niti jednu točku postaviti na jediničnu kružnicu. Računamo po formuli za težište

$$\boxed{a_1 = \frac{b + c + d}{3}}$$

Uvjet zadatka nam zapravo govori da je $A_1$ polovište od $A$ i $A_2$, dakle vrijedi

$$a_1 = \frac{a + a_2}{2}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\boxed{a_2 = \frac{2b + 2c + 2d - 3a}{3}}$$

Kako općenito postaviti uvjet da je neki četverokut $ABCD$ paralelogram? Dat ćemo čak dva vrlo slična pristupa. $ABCD$ je paralelogram ako i samo ako vrijedi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, drugim riječima ako i samo ako je $b - a = c - d \Leftrightarrow \boxed{a + c = b + d}$. Slično, možemo karakterizirati pravokutnik kao onaj četverokut kojem se dijagonale prepolavljaju, odnosno polovište od $\overline{AC}$ je isto kao polovište od $\overline{BD}$. To je ekvivalentno tome da je $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$, dakle ponovo očekivano dobivamo isti uvjet.

Po simetriji sad znamo i točke $b_2$, $c_2$ i $d_2$, pa je četverokut $A_2B_2C_2D_2$ paralelogram ako i samo ako je

$$a_2 + c_2 = b_2 + d_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4b - c + 4d - a}{3} = \frac{4a - d + 4c - b}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$a + c = b + d$$

A ovo je pak ekvivalentno s tim da je $ABCD$ paralelogram, čime je tvrdnja pokazana.

Primjetimo samo da ovdje nigdje nismo koristili uvjet da je četverokut $ABCD$ konveksan. Zaista, ista tvrdnja vrijedi i za nekonveksne četverokute. Često će se dogoditi da se možemo "rješiti" nekog uvjeta, u smislu da će tvrdnja zadatka vrijediti i ako ga ignoriramo, i neće biti nimalo teža za dokazati. Tipično se ovo događa kad se traži da je neka točka s neke određene strane nekog pravca kako bi se planimetrijskog rješavača poštedilo analize dvaju gotovo identičnih slučajeva. Često se tu radi o tome da je u jednoj skici neki kut jednak komplementu odgoavarujećug kuta u drugoj skici. Kompleksni brojevi automatski tada obuhvaćaju sve slučajeve jer oni modeliraju orjentirane kuteve. Ipak, treba biti iznimno oprezan kod "izbacivanja" uvjeta - može se desiti da tvrdnja više ne vrijedi kad neki uvjet maknemo. Zato je dobro skicirati i probati se uvjeriti da će tvrdnja vrijediti. Modelirati konkretno ovaj uvjet da je četverokut konveksan pomoću kompleksnih brojeva je praktički neizvedivo na operativnoj razini.

6. Postavimo $k = \mathcal{S}$. $AC$ će biti promjer ako i samo ako je $\boxed{a = -c}$. Dodatno, možemo bez smanjenja uvesti pretpostavku $\boxed{a = -1}$, $\boxed{c = 1}$. $M$ dobivamo kao presjek pravaca $AB$ i $CD$. Kako su sve te točke na $\mathcal{S}$, vrijedi jednostavna formula za te pravce, te uz dodatan izbor za $a$ i $c$ imamo

$$z - b\overline{z} = b - 1$$

$$z + d\overline{z} = d + 1$$

Kako je $M$ jedina točka presjeka, oduzimanjem dobivamo

$$\boxed{\overline{m} = \frac{d - b + 2}{b + d}}$$

Za izračunati $N$, prvo nam treba jednadžba tangente u $B$. To je pravac okomit na $OB$ koji prolazi kroz $B$. Pravac koji prolazi kroz $OB$ određen je i time da prolazi točkama $b$ i $-b$ koje su na $\mathcal{S}$. Dakle, ima koeficijent smjera $-b^2$. Dakle, tangenta u $B$ je okomita i njega te prolazi kroz $B$, pa ima jednadžbu

$$z + b^2\overline{z} = b + b^2\overline{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{z + b^2\overline{z} = 2b}$$

Mali trik za upamtiti ovu formulu je kao da gledamo jednadžbu sekante kroz $AB$, $z + ab\overline{z} = a + b$, i uvrstimo $a = b$. Sad slično, jednadžba tangente u $D$ glasi

$$z + d^2\overline{z} = 2d$$

pa dobivamo

$$\boxed{\overline{n} = \frac{2}{b + d}}$$

Želimo dokazati da je $MN$ okomito na $AC$. Koeficijent smjera od $AC$ je $ac = -1$. Koeficijent od $MN$ je $-\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}$.

$$\boxed{\overline{m} - \overline{n} = \frac{d-b}{d+b}}$$

Ilustrirajmo na ovom primjeru kako možemo brzo konjugirati razlomak. Ono što mi sada želimo je napraviti dvojni razlomak gdje je u brojniku konjugat izračunatog nazivnika. Napravimo to prvo postepeno:

$$\boxed{m-n} = \overline{(\frac{d-b}{d+b})} = \frac{\overline{d}-\overline{b}}{\overline{d}+\overline{b}} = \frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{d}+\frac{1}{b}} = \frac{\frac{b-d}{bd}}{\frac{b+d}{bd}} = \boxed{\frac{b-d}{b+d}}$$

Kako to možemo učiniti brzo? Pogledajmo "jednočlani" polinom najmanjeg stupnja tako da je stupanj veći od svih izraza u brojniku i u nazivniku. U našem slučaju to je $bd$. Sad u glavi pomnožimo brojnik i nazivnik s $bd$, i onda umjesto pojedinih članova gledamo "koliko nam fali do tog našeg polinoma", odnosno dijelimo taj polinom s odgovarajućim članom.

Za ilustraciju, izračunajmo konjugat od $\frac{a^2+bc+c^3}{abc+b^2c^2}$. Polinom kojeg gledamo je sad $a^2b^2c^3$, a konjugat je $\frac{b^2c^3+a^2bc^2+a^2b^2}{abc^2+ac}$. Istaknimo još jednom da ovo vrijedi samo ako su nam sve dotične koordinate iz $\mathcal{S}$.

Sad se lako vidi da je koeficijent smjera $MN$ jednak 1 pa slijedi tražena okomitost.

Istaknimo u ovom zadatku kako zapravo nikad nismo izračunali $M$ i $N$. Ovdje to nije bilo od presudne važnosti, ne bi ih bilo teško izračunati. No, primjetimo da nam se dvojka pokratila u izrazu $\overline{m} - \overline{n}$. U nekim kompliciranijim izrazima moguće je da dođe do puno većeg kraćenja i ovakvi mali trikovi su apsolutno neophodni za uspješno rješavanje zadataka. Također, primjetimo da nismo nikada izračunali tražene pravce, nego samo njihove koeficijente smjerova, no to je već bilo očito da nećemo računati.

7. Postavimo opisanu kružnicu četverokuta $ABCD$ u $\mathcal{S}$. Tada je

$$\boxed{h = a + b + d}$$

Kako doći do točke $B'$? Označimo s $X$ nožište visine iz $C$ na $AB$. Sijedi da je $X$ polovište od $B'C$. $X$ je određen pravcima $AB$ i pravcem okomitom na $AB$ koji prolazi kroz $C$, drugom rječju, pravcima

$$z + ab\overline{z} = a + b$$

$$z - ab\overline{z} = c - ab\overline{c}$$

Zbrajanjem slijedi

$$\boxed{x = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c})}$$

Sada, kako je $X$ polovište od $B'C$, slijedi

$$\boxed{b'} = 2x - c = \boxed{a + b - ab\overline{c}}$$

Sada smijemo uvesti dodatnu predpostavku: $\boxed{c = 1}$. Naravno, ovo smo mogli i na početku, ali ima smisla prvo malo računati pa onda pogledati isplati li se uvesti dodatnu pretpostavku na neku točku ako time ne gubimo simetriju. Jedna stvar koju ćemo ipak izgubiti je homogenost - primjetimo da su nam ovako uvijek sve točke bile stupnja 1, a uz ovu predpostavku neće. Zato treba biti oprezan kada i što izabrati, nekad je lakše raditi s "više stupnjeva slobode", a nekad nije.

Najlakši način da se uvjerimo da su $H$, $B'$ i $D'$ kolinearne je da se uvjerimo da su koeficijenti nekih dvaju od pravaca $HB'$, $HD'$ i $D'B'$ jednaki. Jer, tada će to biti dva paralelna pravca koja dijele točku, dakle bit će jednaki. Zbog simetrije ovdje ima smisla gledati pravce $HB'$ i $HD'$. Računamo:

$$\boxed{h - b'} = a + b + d - (a + b - ab) = d + ab = \boxed{\frac{d + ab}{1}}$$

Pripadni polinom ovom razlomku je $abd$, pa je koeficijent smjera jednak

$$\boxed{-\frac{h - b'}{\overline{h} - \overline{b'}}} = -\frac{d + ab}{ab + d}abd = \boxed{-abd}$$

Zbog simetrije zadatka u $b$ i $d$, kad bismo izračunali točku $D'$ i koeficijent pravca $HD'$, dobili bismo $-adb$, odnosno, isti taj izraz, budući da je i sam izraz također simetričan u $b$ i $d$. Dakle, traženi pravci su paralelni, pa su identični, budući da oba prolaze kroz $H$, pa su $H$, $B'$ i $D'$ kolinearne.

8. Ako bismo sad krenuli putem kako smo inače kretali kad nam je bio zadan trokut, tako da mu opisanu kružnicu postavimo na $\mathcal{S}$, račun bi nam bio prilično kompliciran. Općenito, ako baš moramo, postoji izvod formule za središte upisane kružnice, no time se ovdje nećemo baviti, a ako vas zanima, pogledajte na kraju, u literaturi. U ovom slučaju puno je prirodnije postaviti upisanu kružnicu na $S$, te točke $D$, $E$ i $F$ na "početne" točke, i pomoću njih izraziti sve ostale.

   Sad računamo: $A$ je presjek tangente u $E$ i tangente u $F$, dakle određen je pravcima

$$z + e^2\overline{z} = 2e$$

$$z + f^2\overline{z} = 2f$$

   Dakle, imamo

$$\overline{a} = \frac{2}{e + f}$$

   Minimalni polinom ovom razlomku je $ef$, pa lako dobivamo

$$\boxed{a = \frac{2ef}{e + f}}$$

   Analogne formule vrijede za $b$ i $c$, a kako je $M$ polobište od $B$ i $C$ vrijedi

$$m = \frac{2de(d + f) + 2df(d + e)}{(d + e)(d + f)}$$

Sad vidimo da će nam biti zgodno uzeti $\boxed{d=1}$, što smijemo, pa dobivamo

$$\boxed{m = \frac{2ef+e+f}{(e+1)(f+1)}}$$

$P$ je određen pravcem $EF$ i pravcem $DS$. $DS$ je isto tako određen time da prolazi kroz $d$ i $-d$, tj 1 i $-1$. Dakle, jednadžbe tih pravaca su

$$z + ef\overline{z} = e + f$$

$$z - \overline{z} = 0$$

Primjetite da je pravac $DS$ zapravo realna os i ima očekivanu jednadžbu, $z = \overline{z}$. Dobivamo

$$\boxed{p = \frac{e+f}{1+ef}}$$

Kako bismo provjerili da su $A$, $M$ i $P$ kolinearne, preostaje nam provjeriti da su neka dva pravca od $AM$, $AP$ i $PM$ kolinearni. Zbog jednostavnosti formule za $a$ gledat ćemo $AP$ i $AM$. Dovoljno je dakle vidjeti da je $-\frac{p-a}{\overline{p}-\overline{a}} = -\frac{m-a}{\overline{m}-\overline{a}}$. Ovo je ekvivalento tome da je broj $\frac{m-a}{p-a}$ jednak svom konjugatu.

$$\frac{m-a}{p-a} = \frac{(2ef+e+f)(e+f) - 2ef(e+1)(f+1)}{(e+f)(e+f) - 2ef(1+ef)} \cdot \frac{1+ef}{(e+1)(f+1)}$$

Ovdje smo u lijevom razlomku ostavili brojnike početnog dvojnog razlomka, a u desnom nazivnike. Vidimo da je desni jednak svom konjugatu, njegov minimalni polinom je $ef$, dakle u isto se trebamo još uvjeriti samo za desni razlomak. Nažalost, neki put naprosto ne možemo proći bez malo računa. Jedna ideja kako efikasno množiti ovakve izraze bez puno pisanja je da raspišete sve moguće monome koji se javljaju i onda gledate koji je njihov koeficijent. Dobivamo dakle da za sljedeći izraz treba pokazati da je jednak svom konjugatu:

$$\frac{e^2f^2(-2) + e^2f(2-2) + ef^2(2-2) + e^2(1) + f^2(1) + ef(1+1-2)}{e^2f^2(-2) + ef(1+1-2) + e^2(1) + f^2(1)}$$

Razlog zašto u računu plusevi i minusi nisu odmah pokraćeni je taj jer nam ovo daje provjeru točnosti: broj članova, ako sve brojeve gledamo kao pozitivne, u brojniku nam je na početku $(2+1+1)(1+1) + 2(1+1)(1+1) = 16$, a toliko iznosi i zbroj apsolutnih vrijednosti brojeva u zagradama u brojniku nakon izmnožavanja. Slično dobivamo i za nazivnike, $(1+1)(1+1) + 2(1+1) = 8 = 2+1+1+2+1+1$.

Dobivamo dakle da se radi o izrazu

$$\frac{-2e^2f^2 + e^2 + f^2}{-2e^2f^2 + e^2 + f^2} = 1$$

koji je u ovom slučaju očito jednak svom konjugatu.

9. Postupamo posve analogno prethodnom zadatku, dakle postavljamo $\boxed{d=1}$, $e$, $f \in \mathcal{S}$.

$$\boxed{m = \frac{2ef+e+f}{(e+1)(f+1)}}$$

$X$ je sjecište pravaca $BS$ i $EF$, a vjerojatno najjednostavnija karakterizacija pravca $BS$ je da je okomit na $DF$ i prolazi kroz 0. Dakle, $X$ zadovoljava

$$z - f\overline{z} = 0$$

$$z + ef\overline{z} = e + f$$

Odnosno nakon oduzimanja,

$$\overline{x} = \frac{e+f}{f(e+1)}$$

Pripadni polinom ovom razlomku je $ef$, pa odmah imamo formulu za $x$ i simetričnu za $y$

$$\boxed{x = \frac{e+f}{e+1}}$$

$$\boxed{y = \frac{e+f}{f+1}}$$

Označimo $\varphi = \sphericalangle XMY$, kao orjentiran kut, te $\varepsilon = e^{i\varphi}$. Sada nam je $XMY$ jednakokračan ako i samo ako je $Y$ dobiven rotacijom točke $X$ oko $M$ za $\varphi$ u pozitivnom smjeru.

Dakle, $XYM$ je jednakokračan ako i samo ako je

$$y = (x - m)\varepsilon + m$$

$$\Updownarrow \text{ nakon množenja s } (e+1)(f+1)$$

$$(e+f)(e+1) = ((e+f)(f+1) - (2ef + e + f))\varepsilon + 2ef + e + f$$

$$\Updownarrow$$

$$e^2 - ef = (f^2 - ef)\varepsilon$$

$$\Updownarrow \text{ nakon dijeljena s } (e-f)$$

$$\boxed{e = -\varepsilon f}$$

Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$, kao orjentiran kut, te $\omega = e^{i\alpha}$. Prisjetimo se, pravci $p_1$ i $p_2$ s koeficijentima smjera $t_1$ i $t_2$, sijeku se pod kutem $\varphi$ ako i samo ako je $t_2 = e^{2i\varphi}t_1$. Kako je $AB$ zapravo tangenta u $F$, ona je okomita na $SF$, pa ima koeficijent smjera $f^2$. Slično, $AC$ ima koeficijent smjera $e^2$. Slijedi

$$e^2 = \omega^2 f^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{e = \omega f} \text{ ili } \boxed{e = -\omega f}$$

Primjetimo da ne može biti $e = \omega f$, za $0 \leqslant \alpha < \pi$ jer bi onda trokut bio orjentacije $ACB$ što se lako vidi sa skice. Naime, u tom bi slučaju $\alpha$ bio zapravo vanjski kut pri vrhu $A$ jer smo ga uzeli kao orjentirani kut $\sphericalangle BAC$.

Vijedi dakle $XMY$ je jednakokračan s orjentiranim kutem $\varphi \Leftrightarrow e = -\varepsilon f$, te orjentirani kut $\alpha = \sphericalangle BAC \Leftrightarrow e = -\omega f$. Dakle, vrijedi $XYM$ jednakostraničan ako i samo ako je $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$.

Primjetimo ovdje jednu suptilnu sitnicu. Ako je $\alpha = \varphi = -\frac{\pi}{3}$ tada dobivamo skicu u kojoj je trokut orjentacije $ACB$. No ovdje će i dalje sve "štimati" za razliku od slučaja kojeg smo gore argumentirali, jer će zaista kut $\alpha$ biti unutarnji kut trokuta za kojeg trebamo u pozitivnom smjeru zarotirati pravac $AB$ oko $A$ da dođemo do $AC$. Budući da rotiramo za negativan kut u pozitivnom smjeru, zapravo smo ostvarili rotaciju u negativnom smjeru. U gore spomenutom slučaju, $\alpha$ će "ocrtati" vanjski kut trokuta što ne želimo.

10. Postavimo opisanu kružnicu od $ABCD$ na $\mathcal{S}$. Označimo s $A_1$, $B_1$ i $C_1$ redom nožišta visine iz $D$ na $BC$, $CA$ i $AB$. $C_1$ je određen pravcem $AB$ i pravcem okomitom na $AB$ koji prolazi točkom $D$, odnosno pravcima:

$$z + ab\overline{z} = a + b$$

$$z - ab\overline{z} = d - ab\overline{d}$$

Zbrajanjem i korištenjem $\overline{d} = \frac{1}{d}$, dobivamo

$$\boxed{c_1 = \frac{a + b + d - ab\overline{d}}{2}} = \frac{ad + bd + d^2 - ab}{2d} = \boxed{\frac{d(a + d) + b(d - a)}{2d}}$$

Ovako smo faktorizirali kako bismo sad mogli brzo reći da $b_1$ dobivamo po istoj ovoj formuli, uz zamjenu $b$ i $c$ zbog simetrije. Stoga je

$$c_1 - b_1 = \frac{(b - c)(d - a)}{2d}$$

Pripadni polinom ovog razlomka je $abcd$, pa je konjugat ovog broja

$$\overline{c_1} - \overline{b_1} = \frac{(c - b)(a - d)}{2abc}$$

Dakle, pravac kroz $b_1$ i $c_1$ ima nagib

$$\boxed{-\frac{c_1 - b_1}{\overline{c_1} - \overline{b_1}} = -\frac{abc}{d}}$$

Po simetriji, ovo je dovoljno da zaključimo da $A_1$ leži na pravcu $B_1C_1$. Time smo završili s prvim dijelom zadatka. Ipak, mi trebamo naći sjecišta dva ovakva pravca i pokazati da je to ujedno sjecište od sva četiri. Izračunajmo stoga pripadni $s$ ovog pravca iz jednadžbe koristeći činjenicu da je $C_1$ na tom pravcu, odnosno $s = c_1 - \frac{abc}{d}\overline{c_1}$. $c_1$ ima pripadni polinom $abd^2$, pa ga lako konjugiramo.

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{abc}{d}\overline{c_1} &= \frac{ad + bd + d^2 - ab}{2d} - \frac{abc}{d} \cdot \frac{bd + ad + ab - d^2}{2abd} \\ &= \frac{ad^2 + bd^2 + d^3 - abd - cbd - cad - cab + cd^2}{2d^2} \end{aligned}$$

Dakle, Simsonov pravac točke $D$ na trokut $ABC$ ima jednadžbu

$$\boxed{z - \frac{a^2bc}{ad}\overline{z} = \frac{a^2d^2(a + b + c + d) - a^2(abc + bcd + cda + dab)}{2a^2d^2}}$$

Primjetimo da je cijeli izraz, očekivano, simetričan u $a$, $b$ i $c$. Razlog zbog kojeg smo razlomke proširili s $a$, odnosno $a^2$ je taj što ćemo sad tražiti sjecište ovog pravca sa Simsonovim pravcem točke $A$ na trokut $BCD$. Zapravo, jednadžbu mu nećemo ni napisati, ona je jednaka ovoj gore uz zamjenu $a$ i $d$. Kako je $F$ sjecište tih dvaju pravaca, oduzimamo te dvije jednadžbe i dobivamo

$$bc\frac{d^2-a^2}{ad}\overline{f} = \frac{(d^2-a^2)(abc+bcd+cda+dab)}{2a^2d^2}$$

$$\Updownarrow \text{ nakon kraćenja s } d^2-a^2\text{, te s } ad$$

$$\overline{f} = \frac{abc+bcd+cda+dab}{2abcd}$$

$$\Updownarrow \text{ lako konjugiramo izraz, pripadni polinom je } abcd$$

$$\boxed{f = \frac{a+b+c+d}{2}}$$

Primjetite da smo ovdje djelili i množili jednadžbu s izrazima $d^2-a^2$ i $ad$ za koje nismo sigurni jesu li možda jednak nuli.

$ad \neq 0$, jer su $a, d \in \mathcal{S}$.

$d^2-a^2 = (d-a)(d+a)$. $d-a \neq 0$, jer $d \neq a$.

$d+a=0$ je ekvivalento tome da $AD$ čini promjer, a tad je jasno da su Simsonovi pravci točaka $A$ na trokut $BCD$ i $D$ na trokut $ABC$ jednaki, i oba jednaka pravcu $BC$, pa nemaju jednoznačno određeno sjecište. Ipak, tada će ista formula vrijediti za bilo koji par točaka iz skupa $\{A, B, C, D\}$, a zasigurno postoji neki par koji ne čini promjer, pa ćemo dobiti istu formulu za $F$. Ovakve stvari je često dobro imati na umu, ali u principu ništa ovog tipa ne trebate argumentirati kad rješavate zadatke na natjecanjima.

Sad je zbog simetrije $F$ ujedno i sjecište preostala dva Simsonova pravca. Zaista, da smo računali sjecište Simsonovih pravaca točke $D$ na trokut $ABC$ i točke $B$ na trokut $CDA$, dobili bismo istu formulu za $f$ s zamjenjenim $a$ i $b$, odnosno, jer je $f$ simetričan u $a$, $b$, $c$ i $d$, dobili bismo upravo istu formulu. Slično vrijedi i za posljednji pravac.

Ako sad fiksiramo $A$, $B$ i $C$ i pustimo da $D$ "kruži" po $\mathcal{S}$, vidimo da će nam geometrijsko mjesto točaka $F$ biti upravo kružnica sa središtem $\frac{a+b+c}{2}$ radijusa $\frac{1}{2}$.

Zanimljiva je činjenica da je to upravo Feuerbachova kružnica. To nije nimalo teško dokazati jednom kad znamo da dokazujemo upravo to. Naime, udaljenost od $F$ do nožišta visine, $N$, iz $C$ na $AB$, koje ima istu formulu kao $c_1$ s početka zadatka, samo uz zamjenu $d$ i $c$, dobivamo

$$|FN| = |f-n| = |\frac{a+b+c}{2} - \frac{a+b+c-ab\overline{c}}{2}| = |\frac{ab\overline{c}}{2}| = \frac{1}{2}$$

Posljednja jednakost vrijedi jer su $a, b, c \in \mathcal{S}$. Po simetriji znamo da je $F$ udaljena za $\frac{1}{2}$ od nožišta preostalih dvaju visina, pa vidimo da je dobivena kružnica uistinu Feuerbachova kružnica.

## Par napomena za kraj

- Od izrazite pomoći pri rješavanju zadataka ovom tehnikom je očuvanje simetrije. Ključno je smanjiti računanje i pisanje na minimum, a u isto vrijeme imati, u glavi i na papiru, sve sistematično posloženo.
- Često baš onu kružnicu na kojoj leži najviše točaka uzimamo za $\mathcal{S}$. Katkad možemo za neku istaknutu točku uzeti dodatnu pretpostavku, npr. da je jednaka 1, no to nam narušava homogenost, pa treba biti pažljiv.
- Navedena homogenost je dobar način provjere da smo dobro proveli račun. Primjetite da nam je u svakom homogenom računu stupanj svake točke 1, pri čemu konjugat računamo kao stupanj $-1$. Također, upamtite da je za svaki pravac, njegov koeficijent smjera, $t \in \mathcal{S}$, pa će u računu, ako su vam sve "početne" točke izabrane s $\mathcal{S}$, $t$ biti umnožak nekih od početnih točaka.
- Također, pametno je imati još neke načine provjere dugih računa. Jedan od potencijalnih načina iznesen je u zadatku 8.
- U računu koji je simetričan po $A$ i $B$, često će se cijela jednadžba dati podijeliti s $(a - b)$. U takvim računima ne treba voditi brige o djeljenu s nulom.
- Ovi materijali napravljeni su za osobu koja se tek susreće s ovom metodom, i rješenja su pisana s namjerom da budu detaljna i sistematična. Ukoliko kanite koristiti ovu metodu za rješavanje zadataka natjecateljskog tipa, trebate uvelike skratiti sve popratne tekstove, te ostaviti samo formule uz kratki komentar što nam koja formula predstavlja, te pisati npr. koju formulu nam je dovoljno dokazati da rješimo zadatak a koja nam je do sad poznata, i slične stvari.
- Dobra praksa je znati procjeniti koliko će vam vremena oduzeti neki dio računa pa onda zaključiti isplati li nam se uopće nastaviti s ovom metodom rješavanja ili ne. Kako bi postigli to, a i općenito kako bi uvježbali ovu metodu, potrebno je riješiti popriličnе količine zadataka.
- Kao izvrsnu kolekciju zadataka, za kraj, istaknuo bih skriptu Marka Radovanovića koja je poslužila kao podloga za izradu ovog materijala. Možete ju naći na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/komp_geo_mr.pdf`.