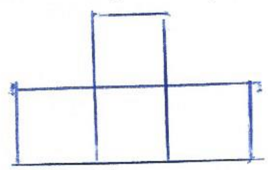
Invarijante i monovarijante

Bojanja - uvodni zadatci

1. Može li se šahovska ploča od koje su izrezana dva nasuprotna kutna polja pokriti pravokutnim pločicama tipa 1×2 ?

2. Može li se ploča 10×10 pokriti pločicama tipa 1×4 ?

3. Može li se ploča 50×50 pokriti pločicama oblika



?

Invarijante - uvodni zadatci

1. Na stolu se nalazi 16 čaša. Od njih je 15 postavljeno pravilno, a 1 naopačke. U jednom potezu je dozvoljeno istovremeno bilo koje dvije čaše. Može li se, ponavljanjem takvog postupka, postići da sve čaše budu postavljene pravilno?

2. Na školskoj ploči je napisano 5 brojeva. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo bilo koja tri broja, nazovimo ih x, y i z i mijenjamo ih u $2x - y$, $2y - z$ i $2z - x$. Ako su na početku bili napisani brojevi 7, 10, 12, 15, 17, možemo li, uzastopnim ponavljanjem tog postupka, doći do petorke brojeva:

   a) 6, 8, 10, 18, 19 ?

   b) 9, 11, 13, 14, 16 ?

3. Ploča 8×8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno ?

4. Na otoku Velika Hrid živi 8 plavih, 10 crvenih i 12 zelenih kameleona. Kada se susretnu dva kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije izvjesnog broja susreta, svi kameleoni budu istobojni?

5. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geqslant 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti, proizvoljan, prirodan broj. Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

6. Na po volji velikoj kvadratnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja kvadrata 3×3, po jedan u svako polje. U svakom koraku možemo s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je preskočen uklanjamo. Može li ova "igra" završiti sa samo jednim žetonom na ploči ?

7. a) Dokaži da skakač (skačući po pravilima kao šahovska figura) ne može obići svako polje ploče $m \times n$ (m i n neparni) i vratiti se na početno polje.

   b) Može li skakač obići svako polje ploče 4×8 točno jednom i vratiti se na početno polje?

8. Tom i Jerry igraju sljedeću igru: najprije Jerry napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Tom pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki, višestrukim ponavljanjem sljedeće operacije - u jednom koraku on odabire dva broja i zamjenjuje svaki od njih njihovim zbrojem.

   Može li Jerry odabrati takve brojeve da Tom ne može ostvariti svoj naum ili Tom može ostvariti svoj naum, bez obzira koje brojeve Jerry odabere?

ZADATCI ZA SAMOSTALNI RAD:

1. Može li se šahovska ploča od koje je izrezano jedno kutno polje pokriti pravokutnim pločicama tipa 1x3 ?

2. a) Na školskoj ploči su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 12345. Kažnjeni učenik Berigoj mora najprije obrisati bilo koja dva broja i zamijeniti ih apsolutnom vrijednošću njihove apsolutnom razlike. I onda taj postupak mora ponavljati sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Tog se dosadnog posla može riješiti samo ako zna mora li taj zadnji broj biti paran ili neparan (uz obrazloženje, naravno). Pomozite Berigoju i riješite taj zadatak.

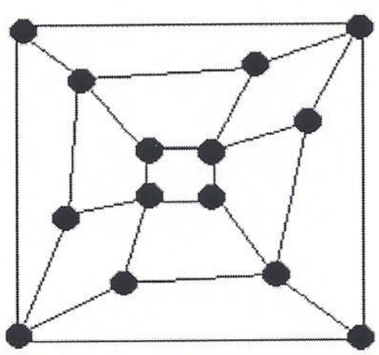
b) Poopćite zadatak, na način da su na školskoj ploči na početku brojevi od 1 do n. Nađite sve n za koje je odgovor da je zadnji broj paran, kao i sve n, za koji je odgovor da je n neparan. Ima li takvih n za koje rezultat ovisi o izboru brojeva koje brišemo ?

3. Zadana je ploča 5x5 i na svakoj je postavljen jedan žeton. Ako u svakom koraku pomaknemo žetone sa dva polja (ne nužno različita) po jedan žeton u susjedno polje (dva su polja susjedna ako imaju zajedničku stranicu), možemo li sve žetone premjestiti u polje označeno sa:

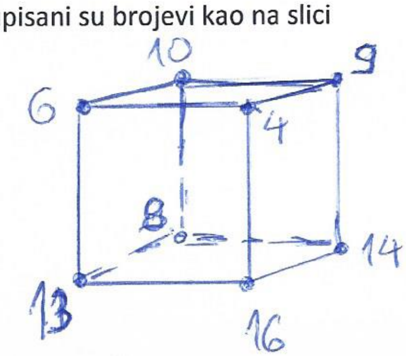
a) x, b) o.

	x			
			o	

4. Zadana je mreža gradova (i puteva među njima) u državi Bekoniji (vidi sliku). Postoji li put koji prolazi kroz sve gradove točno jednom ?



5. U vrhovima kocke upisani su brojevi kao na slici



U jednom koraku dozvoljeno je povećati za 1 brojeve u dva vrha koji leže na istom bridu. Je li moguće postići da brojevi u svim vrhovima kocke budu jednaki ?

6. Može li se šahovska ploča prekriti 21 pravokutnom pločicom tipa 1x3 i jednom tipa 1x1 ? Ako je to moguće, koje polje mora biti pokriveno pločicom 1x1 ?

7. Čarobnjak iz „Mačka u čizmama" ima vještinu pretvaranja miševa u lavove i obratno. Za večeru je pozvao 11 miševa i 1 lava i posjeo ih oko okruglog stola. Ali čarobnjak svoju vještinu može jednokratno primijeniti samo na tri gosta koja oko stola sjede do drugoga. I onda je može primijeniti opet, po istom pravilu. I opet, i opet... Može li čarobnjak uzastopnim ponavljanjem te operacije postići da oko stola bude 11 miševa i 1 lav, ali tako da lav sjedi na mjestu neposredno pored onog na kojem je lav sjedio na početku ?

8. U svakom koraku iz para (m,n) dobivamo novi par kao (m-n,n) ili (m+n,n) ili (n,m). Možemo li, višestrukim ponavljanjem opisanog postupka, iz para (21,36) dobiti:

a) (27,30), b) (18,45) ?

I riješite općenit problem: nađite nužne i dovoljne uvjete da iz para (a,b), višestrukim ponavljanjem opisanog postupka, možemo dobiti par (c,d).

(ako riješite općenit problem, ne morate rješavati konkretne zadatke pod a) i b), ali rješavanje konkretnih zadataka vam može pomoći.)