Prebrojavanje

Uvod

U ovom predavanju ćemo obraditi razne zadatke u kojima je cilj prebrojiti koliko nečega ima. Predavanje je podijeljeno u više poglavlja. U prvom ćemo obraditi jednostavnije zadatke iz prebrojavanja, u drugom ćemo prebrojavati koristeći formulu uključivanja i isključivanja, u trećem ćemo riješiti neke zadatke u kojima se koristi metoda dvostrukog prebrojavanja (u tim zadatcima je prebrojavanje samo metoda za rješavanje drugog kombinatornog problema), a u četvrtom ćemo prebrojavati koristeći rekurzivne relacije.

Jednostavniji zadatci iz prebrojavanja

1. Na koliko načina se može 8 topova razmjestiti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?

   Rješenje. Ovo je zaista jednostavan uvodni zadatak razine 6-bodovnih zadataka na školsko-općinskom natjecanju.

   Idemo redom. Top u prvom stupcu možemo staviti na bilo koje od 8 mjesta; top u drugom stupcu na bilo koje od mogućih 7 mjesta (sve osim onog koje se nalazi u istom retku kao i top koji je već postavljen u prvom stupcu); za top u trećem stupcu onda (analognim zaključivanjem to vidimo) imamo 6 mogućnosti, itd., dok zadnji top ima samo jednu mogućnost za svoju poziciju.

   Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, broj mogućih rasporeda je $8 \cdot 7 \cdot 6 ... \cdot 2 = 8!$.

2. a) Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od po tri znamenke 1, 2 i 3?

   b) Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva koji se sastoji od tri trojke istih znamenaka, različitih od 0?

   Rješenje. a) I način. Devet brojeva možemo permutirati na 9! načina. Iste brojeve ćemo dobiti za svaku permutaciju tri trojke (kojih ima 3!), tri dvojke (kojih ima 3!) i tri jedinice (kojih ima 3! načina), pa je tih brojeva ukupno $\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{362880}{6^3} = 1680$.

   II način. Tri jedinice možemo razmjestiti na $\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!\cdot 3!}$, nakon toga tri dvojke na $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!}$ načina. Nakon toga jednoznačno su određene pozicije tri trojke. Dakle, po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, tih je brojeva $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} \cdot \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{362880}{6^3} = 1680$.

   b) Od devet brojeva možemo odabrati tri na $\binom{9}{3} = 84$ načina, a raspored tih brojeva je moguć na 1680 načina (vidi a) dio zadatka). Dakle, po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, zaključujemo da tih brojeva ima $84 \cdot 1680 = 141120$.

3. Neka su m i n prirodni brojevi. Višeslav je nacrtao pravokutnik duljina stranica m i n podijelio ga na $m \cdot n$ jediničnih kvadratića. Koliko pravokutnika ima na tom crtežu?

   Rješenje. Svaki je pravokutnik jednoznačno određen s dva para pravaca na kojima leže njegove stranice. S obzirom da vertikalnih i horizontalnih pravaca ima $m+1$, odnosno $n+1$, onda je broj mogućih izbora dva vertikalna i dva horizontalna pravca jednak $\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$, što predstavlja broj pravokutnika na crtežu.

4. Neka je n prirodni broj. Višeslav je nacrtao tri kvadrata stranice duljine n spojena u obliku slova L (nacrtaj sliku!). Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 jediničnih kvadratića. Koliko je ukupno pravokutnika na crtežu nakon podjele na jedinične kvadratiće?

   Primjedba. Zadatak možete naći na http://www.antonija-horvatek.from.hr (zadatak je bio zadan na županijskom natjecanju 2013./14. za 4.razrede.).

   Rješenje - prvi način.

   Ukupni broj pravokutnika na crtežu jednak je:

   (a) zbroju brojeva pravokutnika u svakom od tri $n \times n$ kvadrata,

   (b) broja pravokutnika u lijevom $2n \times n$ pravokutniku koji nisu sadržani u cijelosti ni u gornjem lijevom ni u donjem lijevom $n \times n$ kvadratu i

   (c) broja pravokutnika u donjem $n \times 2n$ pravokutniku koji nisu sadržani u cijelosti ni u lijevom donjem ni u desnom donjem $n \times n$ kvadratu.

   Svaki pravokutnik je određen odabirom pravaca na kojima leže njegove stranice (vidi zadatak 3.). Zato je zbroj brojeva pravokutnika navedenih pod (a) jednak $3 \cdot \binom{n+1}{2}^2$, a zbroj brojeva pravokutnika navedenih pod (b) i (c) jednak $n^2 \cdot \binom{n+1}{2}$. Dakle, ukupni broj dodatnih pravokutnika je

$$3\binom{n+1}{2}^2 + 2n^2\binom{n+1}{2} = \frac{1}{4}(7n^4 + 10n^3 + 3n^2).$$

   Rješenje - drugi način.

   Izračunajmo broj pravokutnika u lijevom $2n \times n$ pravokutniku i broj pravokutnika u donjem $n \times 2n$ pravokutniku, te ih zbrojimo. No, time smo dvaput brojili pravokutnike u donjem lijevom $n \times n$ kvadratu, pa njih treba oduzeti. Tako dobivamo

$$2\binom{2n+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{2}^2 = \frac{1}{4}(7n^4 + 10n^3 + 3n^2).$$

   Napomena. U drugom načinu rješavanja, primijenili smo sljedeću formulu

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \qquad (*)$$

   pri čemu je $|X|$ oznaka za kardinalni broj skupa X.

   Tu formulu nazivamo formula uključivanja i isključivanja.

Formula uključivanja i isključivanja

Formulu (*) možemo poopćiti na n skupova. Dobiva se

$$|\cup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n+1} |\cap_{1\leqslant i\leqslant n} A_i|.$$

Dokaz nije teško provesti indukcijom.

Riješimo nekoliko zadataka primjenom te formule.

5. Koliko ima sedmeročlanih nizova sastavljenih od slova a, b, c i d ako se svako slovo pojavljuje barem jednom?

   Rješenje. Svih sedmeročlanih nizova koji se sastoje od četiri slova a, b, c i d ima 4^7 (na svakom od sedam mjesta može doći bilo koje od četiri slova).

   Izračunajmo sada koliko ima sedmeročlanih nizova kod kojih se barem jedno slovo ne pojavljuje. Označimo li sa S_a skup svih sedmeročlanih nizova u kojem se ne pojavljuje slovo a, sa S_b skup svih sedmeročlanih nizova u kojem se ne pojavljuje slovo b, sa S_c skup svih sedmeročlanih nizova u kojem se ne pojavljuje slovo c i sa S_d skup svih sedmeročlanih nizova u kojem se ne pojavljuje slovo d, broj svih takvih nizova jednak je $|S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d|$.

   Sada računamo

   $$|S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d| = 4|S_a| - 6|S_a \cap S_b| + 4|S_a \cap S_b \cap S_c| = 7984.$$

   Konačno je traženi broj jednak $4^7 - |S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d| = 8400$.

   Primjedba (drugi način rješavanja). Do tog broja možemo doći i izravnim prebrajanjem - treba izračunati broj sedmeročlanih nizova kod kojih se jedno slovo pojavljuje četiri puta i tri preostala slova po jednom (ima ih $4 \cdot \frac{7!}{4!}$), broj sedmeročlanih nizova kod kojih se jedno slovo pojavljuje tri puta, jedno dvaput i preostala dva po jednom (ima ih $4 \cdot 3 \cdot \frac{7!}{3!\cdot 2!}$), te broj sedmeročlanih nizova koji imaju tri para istih slova i jedno preostalo slovo (ima ih $4 \cdot \frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$) i zbrojiti te brojeve.

6. Vrhovi pravilnog dvanaesterokuta obojani su u plavu ili crvenu boju. Odredi broj mogućih bojanja dvanaesterokuta kod kojih niti jedan jednobojni poligon nije pravilan.

   Rješenje. 906

7. Pustinjom hoda karavana od devet deva. Na koliko se načina, nakon odmora u oazi, one mogu presložiti tako da niti jedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije oaze?

   Rješenje. Uvedimo oznake: S - skup svih deva, A_i, $i = 1, 2, ..., 8$ - skup svih rasporeda deva u kojima $i+1$-va deva hoda iza i-te.

   Tada je konačni cilj izračunati $|A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_8^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_8|$.

   Dobivamo

   $$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_8| =$$

   $$9! - \binom{8}{1}8! + \binom{8}{2}7! - \binom{8}{3}6! + \binom{8}{4}5! - \binom{8}{5}4! + \binom{8}{6}3! - \binom{8}{7}2! + \binom{8}{8}1! = 148329.$$

Dvostruko prebrojavanje

8. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

   Rješenje. Par kušača možemo odabrati na $\binom{n}{2}$ načina. Svaku vrstu vina probat će $\binom{4}{2} = 6$ parova kušača. Ukupno, za n vrsta vina probat će $6n$ parova kušača (niti jedan par se ne smije ponoviti). S druge strane, ukupno imamo $\binom{n}{2}$ različitih parova kušača. Zato mora vrijediti

$$6n \leqslant \binom{n}{2},$$

   odnosno $n \geqslant 13$.

   Da je $n = 13$ dokazujemo tako da konstruiramo tablicu 13×13 u kojoj će biti opisano koja četvorka kušača koje vino kuša i za koju će se vidjeti da je takav raspored kušanja moguć za $n = 13$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1			x			x	x					x	
2				x		x				x	x		
3				x	x				x			x	
4			x				x		x		x		
5			x			x		x				x	
6			x		x					x			x
7		x					x			x		x	
8		x				x			x				x
9		x			x			x			x		
10	x										x	x	x
11	x							x	x	x			
12	x				x	x	x						
13	x	x	x	x									

   Dakle, u prvom dijelu zadatka smo brojili parova kušača na dva načina (po kušaču i ukupno) i zato se kaže da smo "dvostruko prebrojavali". Ta se metoda naziva metoda dvostrukog prebrojavanja.

   Ipak, u ovom je zadatku konstrukcija bila teži dio zadatka (iako se mora priznati da je matematički bitno "nezanimljiviji" dio).

9. n djece treba probati 10 vrsta bombona tako da budu zadovoljena ova tri uvjeta:

   (i) svako dijete proba točno 5 vrsta bombona,

   (ii) svaku vrstu bombona proba jednak broj djece,

   (iii) za dvoje djece promatramo broj vrsta bombona koje je probalo i jedno i drugo dijete i za sve parove djece ti su brojevi jednaki.

   Odredi sve n za koje je to moguće provesti.

Rješenje. I ovaj ćemo zadatak riješiti metodom dvostrukog prebrojavanja.

Neka je svaku vrstu bombona probalo m djece i neka je svako dvoje djece probalo zajedno k bombona.

Prebrojimo najprije broj ukupno kušanih bombona na dva načina.

Krenemo li od djece, dobivamo da je ukupni broj kušanih bombona $5n$.

Krenemo li od bombona, dobivamo da je ukupni broj kušanih bombona $10m$.

Tako imamo $5n = 10m$, tj. $m = \frac{n}{2}$.

Prebrojimo sada broj parova djece koji su probali istu vrstu bombona na dva načina.

Krenemo li od djece, imamo $\binom{n}{2}$ parova djece od kojih je svaki par kušao k zajedničkih vrsta bombona.

Krenemo li od bombona, imamo 10 vrsta bombona, a svaku je vrstu bombona probalo $\binom{m}{2}$ parova djece.

Tako imamo $\binom{n}{2} \cdot k = 10 \cdot \binom{m}{2}$.

Iz toga, zbog $m = \frac{n}{2}$, dobivamo $k(2m-1) = 5(m-1)$.

Odavde slijedi $2m - 1 = 1$ ili $2m - 1 = 5$. Prvi slučaj otpada ($k = 0$), a drugi vodi na $m = 2$, $k = 2$ i $n = 6$.

Ovime naravno nije završeno rješenje zadatka. Potrebno je napraviti konstrukciju, tj. raspored kušanja bombona od strane djece (vrste bombona su označene slovima od A do J, a sudci brojevima od 1 do 6, oznaka + znači da je dijete kušalo odgovarajuću vrstu bombona):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	+	+	+	+	+					
2	+	+				+	+	+		
3	+		+			+	+	+		
4		+	+				+		+	+
5				+	+	+		+	+	
6				+	+		+	+		+

10. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

Rješenje. Označimo s n broj natjecatelja.

Promotrimo tablicu s 8 redaka i n stupaca takvu da na presjeku $i-$tog retka i $j-$tog stupca pišemo 1, ako je $i-$ti sudac ocijenio $j-$tog natjecatelja s *prošao* i pišemo 0, ako je $i-$ti sudac ocijenio $j-$tog natjecatelja s *pao*. Uvjet zadatka kaže da, promotrimo li bilo koja dva stupca, u pripadnim retcima će pisati po dvaput 11, 10, 01 i 00. Želimo dokazati da ne postoji 8 stupaca s takvim svojstvom.

Pretpostavimo suprotno - dakle, pretpostavimo da postoji 8 stupaca s gore navedenim svojstvom. Označimo s a_i broj nula u $i-$tom retku. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se prvi redak sastoji od svih nula.

Prebrojimo sad broj parova 00 u istom retku i dva (bilo koja) različita stupca (tj. broj parova natjecatelja koje je jedan sudac obojicu ocijenio s *pao*) na dva načina.

Brojimo li po retcima, dobivamo $\sum_{i=1}^{8} \binom{a_i}{2}$.

Brojimo li po stupcima, korištenjem uvjeta zadatka, dobivamo $\binom{8}{2} \cdot 2 = 56$.

Zato mora biti

$$\sum_{i=1}^{8} \binom{a_i}{2} = 56. \qquad (*)$$

Kako je $\sum_{i=1}^{8} a_i = 32$ (zbog uvjeta zadatka) i kako je, po pretpostavci $a_1 = 8$, mora biti $\sum_{i=2}^{8} = 24$.

Lako je pokazati da je $\sum_{i=2}^{8} a_i \geqslant 30$. Iz toga slijedi da je $\sum_{i=1}^{8} a_i \geqslant \binom{8}{2} + 30 = 58$, što je kontradikcija s $(*)$.

Iz toga slijedi da je početna pretpostavka pogrešna pa je $n \leqslant 7$.

Da je $n = 7$ dokazujemo konstrukcijom tablice sa 7 stupaca koja zadovoljava uvjete zadatka (natjecatelji su označeni slovima od A do G, a sudci brojevima od 1 do 8):

	A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	1	1	1	1
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1

11. Opet natjecanje u kuhanju! I opet, svaki sudac ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Natjecatelja je sada m, sudaca je n, ($n \geqslant 3$ neparan). A poznato je da se svaki par sudaca suglasio u ocjeni najviše k natjecatelja. Dokaži da je

$$\frac{k}{m} \geqslant \frac{n-1}{2n}.$$

Rješenje - sami. Rješenje se može naći na web-u znajući da se radi o drugom zadatku s IMO-a 1998.

12. Još jedno natjecanje u kuhanju! I opet, svaki sudac ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Natjecatelja i sudaca je jednako; ima ih n. Sada je pak poznato da ne postoji par natjecatelja za koje postoji par sudaca koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* može biti najviše $\frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$.

Rješenje - sami. Rješenje ovog zahtjevnog zadatka se može naći na web stranici Antonije Horvatek znajući da se radi o četvrtom zadatku s Državnog natjecanja za četvrte razrede 2001.godine.

Prethodnih pet zadataka su međusobno dosta slični, iako su dosta različiti po pitanju težine.

Na kraju navodimo još jedan zadatak, bitno različitih od prethodnih, u kojem se koristi princip dvostrukog prebrojavanja:

13. Neka je n, $n \geqslant 3$, neparan prirodan broj i neka su c_1, c_2,...,c_n cijeli brojevi. Za svaku permutaciju $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ skupa $\{1, 2, ..., n\}$, definiramo $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Dokaži da postoje različite permutacije a i b skupa $\{1, 2, ..., n\}$ tako da je $n!$ djeljitelj od $S(a) - S(b)$.

    Rješenje - sami. Rješenje se može naći na web-u znajući da se radi o četvrtom zadatku s IMO-a 2001.

Rekurzivne relacije

U ovom poglavlju ćemo prebrojavati koristeći rekurzivne relacije. Prođimo najprije kroz jednostavnije primjere.

14. Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju (svaka dva se sijeku točno u jednoj točki, a nikoja tri ne prolaze istom točkom) dijeli ravninu?

    Rješenje. Označimo s a_n traženi broj. Očito je $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$. Cilj nam je odrediti a_n za opći n.

    Promotrimo najprije $n-1$ pravaca u općem položaju. Oni dijele ravninu na a_{n-1} dijelova. Dodamo li tom skupu $n-$ti pravac tako da i skup od n pravaca bude u općem položaju, onda prvih $n-1$ pravaca siječe taj novi pravac u $n-1$ različitih točaka i očito ga dijeli na n dijelova. Tako dobivamo rekurzivnu relaciju za a_n koja glasi:

    $$a_n = a_{n-1} + n.$$

    Iteriranjem i korištenjem početnog uvjeta $a_1 = 2$, dobivamo $a_n = 2 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

15. Promotrimo sljedeće popločavanje: prvo stavimo na stol jednu pločicu domina. U drugom koraku stavimo oko prve pločice još odgovarajući broj pločica domina, tako da se nove pločice naslanjaju na staru i da je sasvim okružuju tj. da tvore pravokutnu ploču sastavljenu od domina. U trećem koraku okružimo lik dobiven u drugom koraku itd. Koliki se broj pločica domina nalazi u liku nakon n-tog koraka?

    Rješenje - skica. Označimo li s a_n traženi broj, dobivamo rekurzivnu relaciju $a_n = a_{n-1} + 4n - 3$, $n \geqslant 2$, uz početni uvjet $a_1 = 1$.

    Konačno, dobivamo $a_n = 2n^2 - n$.

16. (Hanojski tornjevi) Zadani su kolci A, B i C. Na kolcu A nalazi se n kolutova različite veličine tako da je svaki kolut (osim prvog) manji od onog ispod njega. Sve kolutove treba premjestiti na kolac B, tako da i tamo budu u istom položaju. Pri tome se kolutovi prenose s kolca na kolac tako da se svaki puta prenese samo jedan kolut i da se nikad veći kolut ne stavi na manji, i to služeći se pomoćnim kolcem C. Koliki je najmanji broj prijenosa kolutova potreban za taj premještaj?

Rješenje. Označimo s a_n minimalni broj prijenosa kolutova potreban za taj premještaj. Očito je $a_1 = 1$ Neka je sada $n \geqslant 2$. Da bismo s kolca A uopće mogli skinuti najdonji $n-$ti kolut moramo prethodno premjestiti prvih $n-1$ kolutova na B i C. Kako $n-$ti kolut ne smije doći na neki manji, moramo prethodno prvih $n-1$ kolutova premjestiti na kolac C. Za to je potrebno a_{n-1} prijenosa. Nakon toga trebamo jedan prijenos za za prebaciavanje najdonjeg $n-$tog koluta na kolac B. I onda opet a_{n-1} prijenosa za prebacivanje $n-1$ kolutova s C na B. Tako dobivamo:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Iteriranjem i korištenjem početnog uvjeta $a_1 = 1$, dobivamo $a_n = 2^n - 1$.

17. Neki jezik koristi n slova. Niz slova je riječ tog jezika ako i samo ako se izmedu dva jednaka slova u tom nizu ne nalaze dva jednaka slova. Odredite broj riječi maksimalne duljine u tom jeziku.

    Rješenje - sami. Rješenje možete naći znajući da se radi o 1.zadatku s hrvatskog izbornog natjecanja ("Male Olimpijade") 2002.

18. Neka je n prirodan broj veći od 1. Koliko ima permutacija brojeva $\{a_1, ..., a_n\}$ brojeva $1, 2, 3, ..., n$ takvih da postoji točno jedan indeks $i \in \{1, 2, ..., n\}$ za koji je $a_i > a_{i+1}$?

    Rješenje - skica. Označimo s p_n broj traženih permutacija.

    Dobiva se

$$p_n = p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} = p_{n-1} + 2^{n-1} - 1,$$

    uz početni uvjet $p_1 = 0$.

    Rješenje je $p_n = 2^n - n - 1$.

    U prethodnim zadatcima smo objasnili princip kako postaviti rekurzivnu relaciju i kako pomoću nje riješiti neke probleme prebrojavanja. Za svaku od tih rekurzivnih relacija smo iteriranjem lagano došli do rješenja.

    Ipak, neke rekurzivne relacije mogu biti složenije. Ovdje ćemo obraditi homogene linearne rekurzivne relacije (u zadatcima 19.-25. ćemo problem prebrojavanja svesti na homogenu linearnu rekurzivnu relaciju i nalaženjem njezinog rješenja riješiti problem).

    Općenito, linearna homogena rekurzivna relacija je oblika $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_r a_{n-r} = 0$, gdje su koeficijenti c_i konstante. $c_0, c_r \neq 0$ i $1 \leqslant r \leqslant n$. Ako je zadano r početnih uvjeta (a_0,..., a_{r-1} poznati), onda je rješenje a_n jednoznačno.

    Inače, o rješenju homogene i nehomogene linearne rekurzivne relacije možete pročitati npr. u knjizi D.Veljan: Kombinatorika i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb.

    Algoritam rješavanja možete naći npr. na
    http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kidm/rekurzije.pdf

19. Na koliko načina se može popločiti $n \times 1$ pruga pločicama 1×1 ili 1×2?

    Rješenje. Označimo traženi broj s a_n.

Očito je $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$.

Popločavanje možemo početi s pločicom 1×1 ili 1×2. U prvom slučaju, popločavanje se može dalje nastaviti na a_{n-1} načina, a u drugom na a_{n-2} načina. Zato je

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \tag{$*$}$$

odnosno

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0.$$

Opišimo sada i postupak rješavanja. Najprije napišimo pripadnu karakterisitčnu jednadžbu

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

Njezina su rješenja $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Dakle, opće rješenje rekurzivne relacije (*) je dano s

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Iskoristimo li sada početne uvjete $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$ dobivamo

$$c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2.$$

odakle se, rješavanjem linearnog sustava, dobivaju c_1 i c_2.

Ipak, taj se posao može još malo pojednostavniti. Umjesto gornjih početnih uvjeta, promotrimo početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$ (a_0 je odabran tako da zadovoljava rekurzivnu relaciju (*)). Uz te početne uvjete dobivamo jednostavniji linearni sustav

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

Nakon uvrštavanja $c_2 = 1 - c_1$ u drugu jednadžbu dobivamo $\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} \cdot c_1 = 1$, odnosno $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ i $c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Konačno, dobivamo rješenje

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Primjedba. $a_n = F_{n+1}$, $(n+1)$-vi Fibbonacijev broj.

20. Komunikacijskim kanalima mogu se predati poruke koristeći se samo trima simbolima $a = .$, $b = +$ i $c = -$. Dopustive poruke su one kod kojih se na susjednim mjestima ne pojavljuje simbol a. Koliko ima dopustivih poruka duljine n ?

    Rješenje. Označimo sa d_n broj dopustivih poruka duljine n.

    Očito je $d_1 = 3$ i $d_2 = 8$.

    Ako dopustiva poruka duljine n počinje s b ili c, onda se poruka može dokrajčiti na $2d_{n-1}$ načina, a ako počinje s a, onda se može dokrajčiti s $2d_{n-2}$ načina. Zato je

    $$d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2}, \tag{**}$$

    odnosno

    $$d_n - 2d_{n-1} - 2d_{n-2} = 0.$$

    Rješavanjem karakterisitčne jednadžbe

    $$x^2 - 2x - 2 = 0,$$

    čija su rješenja $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ i $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, dobivamo opće rješenje rekurzije (**):

    $$d_n = c_1\big(1 + \sqrt{3}\big)^n + c_2\big(1 - \sqrt{3}\big)^n.$$

    Opet možemo, kao i u prethodnom zadatku, umjesto početnih uvjeta $d_1 = 3$ i $d_2 = 8$ uzeti početne uvjete $d_0 = 1$ i $d_1 = 3$. No, u svakom slučaju, dobit ćemo

    $$c_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \ c_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

21. Za konačan skup kažemo da je *sebičan* ako sadrži broj svojih elemenata. (na primjer, broj elemenata skupa $A = \{1, 3, 5, 7\}$ je 4, $4 \in A$, pa skup A nije sebičan. Skup $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ima 5 elemenata, $5 \in B$, pa je skup B sebičan.

    Odredi broj podskupova skupa $\{1, 2, 3, ..., n\}$ koji su sebični, ali nijedan njihov pravi podskup nije sebičan.

    Rješenje. Rješenje je n-ti Fibonaccijev broj.

22. Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ točke na kružnici. Nađite broj mogućih bojanja tih točaka s p boja, $p \geqslant 2$, takvih da su svake dvije susjedne točke obojane različitom bojom.

    (napomena: točke su fiksne !)

    Rješenje - skica. Ako je a_n, $n \geqslant 2$ traženi broj, onda a_n zadovoljava rekurzivnu relaciju

    $$a_{n+1} = (p - 2)a_n + (p - 1)a_{n-1},$$

    uz početne uvjete $a_2 = p(p - 1)$ i $a_3 = p(p - 1)(p - 2)$.

    Rješenje je $a_n = (p - 1)^n + (-1)^n(p - 1)$.

23. U južnoj Norveškoj i Danskoj vrlo je popularan pučki ples "Hörje nörje", što bi se u slobodnom prijevodu moglo prevesti kao: "Pazi, ne gazi!" Plesači su podijeljeni u dva reda, n mladića nasuprot n djevojaka, i to tako da svaki od plesača(ica) daje lijevu svoju ruku plesaču(ici) nasuprot sebe ili lijevom(j) susjedu(i) ili osobi nasuprot lijevom(j) susjedu(i). Isto pravilo vrijedi i za desnu ruku. Pri tome nitko ne smije dati obje ruke istoj osobi. Oni nakon toga skakuću uz neku čudnu glazbu (nastojeći da se ne spotaknu i da ne poruše svoju plesnu konfiguraciju).

Koliko ima takvih plesnih konfiguracija ?

Rješenje. Ako je a_n, traženi broj, onda je

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right].$$

Primjedba. Dobiva se ista rekurzivna relacija kao i u zadatku 20., ali uz drugačije početne uvjete.

24. Neka su A i E dva suprotna vrha pravilnog osmerokuta. U vrhu A nalazi se Melkior. Iz svakog vrha Melkior može skočiti na susjedni. Izuzetak je vrh E u kojem Melkior ostaje. Na koliko načina može Melkior doskakutati iz vrha A u vrh E poslije točno n skokova ?

Rješenje - sami. Rješenje zadatka može se naći na web-u znajući da se radi o 6.zadatku s IMO-a 1979.

25. Na koliko se različitih načina može $2 \times 2 \times 12$ rupa popuniti s 24 cigle dimenzija $1 \times 1 \times 2$?

Rješenje - skica. S a_n označimo broj različitih načina za popunjavanje rupe $2 \times 2 \times n$ s ciglama dimenzija $1 \times 1 \times 2$.

Može se ustanoviti da vrijedi

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} + 4a_{n-3} + ... + 4a_0, \qquad (***)$$

uz $a_0 = 1$.

Kako doći do linearne rekurzivne relacije fiksnog reda?

U (***) zamijenimo n s $n-1$. Dobit ćemo

$$a_{n-1} = 2a_{n-2} + 5a_{n-3} + 4a_{n-4} + ... + 4a_0.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

i dalje nastavljamo koristeći algoritam za rješavanje homogene linearne rekurzivne relacije (uzimamo početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 9$).

Na kraju, rješenje je $a_{12} = 4541161$ (a obzirom da se traži a_{12}, ne mora se tražiti a_n, već se a_{12} može izračunati, korak po korak, iz rekurzivne relacije).

Na kraju, završavamo s još jednim, malo drugačijim zadatkom u kojem se koristi rekurzija.

26. U gradu A nalazi se n dječaka i n djevojčica i svaka djevojčica poznaje svakog dječaka. U gradu B nalazi se n djevojčica g_1,...,g_n i $2n-1$ dječaka b_1,...,b_{2n-1} i pritom svaka djevojčica g_i, $i = 1, ..., n$ poznaje samo dječake b_1,...,b_{2i-1}. U svakom od gradova održava se Dan plesa i na njemu se formiraju plesni parovi na način da svaka djevojčica smije plesati samo s dječakom kojeg poznaje. Za svaki $r = 1, 2, ..., n$, s $A(r)$ i $B(r)$ označimo broj različitih načina na koji se plesni parovi mogu formirati u gradu A, odnosno u gradu B. Dokaži da je $A(r) = B(r)$ za svaki $r = 1, 2, ..., n$.

Rješenje - osnovna ideja. S obzirom da brojevi $A(r)$ i $B(r)$ ovise i o n označimo ih s $A(n,r)$, odnosno $B(n,r)$.

Broj $A(n,r)$ lako je odrediti izravno. Imamo

$$A(n,r) = \binom{n}{r}^2 \cdot r! = \frac{n!^2}{(n-r)!^2 \cdot r!}$$

Čitatelju prepuštamo da ustanovi rekurzivnu relaciju za $B(n,r)$ koju nije potrebno (niti je znamo) rješavati, već je potrebno samo provjeriti da $A(n,r)$ zadovoljava tu rekurzivnu relaciju.

Rješenje zadatka može se naći na web-u znajući da se radi o zadatku s IMO Shortlista 1997.