IMO pripreme 2015. Domagoj Ćevid, 11. 6. 2015.

Optimizacija

1 Uvod

U mnogo je zadataka potrebno naći ”najbolju” konfiguraciju. Često se traži da nađemo najveću ili najmanju vrijednost nekog parametra tako da određeni uvjeti vrijede. Mi moramo učiniti dvije stvari: pronaći konfiguraciju sa određenom vrijednosti te pokazati da se ne može bolje od te vrijednosti.

Velika pomoć pri rješavanju zadataka s natjecanja je sama činjenica da su ti zadaci zadani na natjecanju. To nam govori da postoji lijepo rješenje te da trebamo razmišljati u tom smjeru. Postoji nekoliko općenitih strategija za rješavanje takvih tipova zadataka:

- Česta vrsta zadataka je: Koliko najviše možeš odabrati elemenata nekog skupa, a da tvoj odabir ne sadrži neki zabranjen podskup? Tada je dobra strategija promotriti samo neke manje grupe za koje je jasno da ne možemo odabrati mnogo elemenata iz njih.
- Sličan oblik zadatka je da moramo odabrati što manje elemenata, tako da su ipak određeni uvjeti zadovoljeni. Tada možemo uvjete podijeliti u grupe, tako da je jasno da jedan element ne može zadovoljiti previše uvjeta iz jedne grupe.
- Ako želimo nešto prekriti sa što manje ’pločica’, dobro je promatrati neke ’točke’ za koje je jasno da ne možemo pokriti mnogo ’točaka’ sa jednom ’pločicom’.
- Kod grafova ili bojanja, korisno je samo gledati jedan mali dio, npr. samo jedan vrh i njemu susjedne vrhove te iz toga pokušati nešto zaključiti.
- Katkada je korisno uzeti neke parametre kao nepoznanice i ograničiti traženu vrijednost uz pomoć tih parametara. Sada umjesto da tražimo najbolju vrijednost, mi tražimo najbolju granicu. U određenim slučajevima, najbolja granica će odgovarati najboljoj vrijednosti.
- Dobar je pristup za rješavanje optimizacijskih tipova zadataka da u isto vrijeme pokušavamo i naći primjer i dokazati da ne može bolje od neke vrijednosti za koju mislimo da je traženi broj. Dokaz nam može sugerirati kako i napraviti primjer jer znamo da određeni uvjeti moraju biti zadovoljeni. S druge strane, primjer nam može sugerirati kako dokazati da se ne može bolje.
- Uvijek bi se trebalo probati naći što jednostavniji primjer. Ako previše zakompliciramo, teško će nam biti dokazati da je naš primjer uistinu valjan ili nam se može čak dogoditi da nam je primjer kriv, a da to nismo primijetili. Primjer bi trebao slijediti određen uzorak i biti što simetričniji.
- Pri traženju primjera korisno je dati određenu strukturu, primjerice numerirati elemente. Na taj način možemo dobiti puno kompliciranije konstrukcije. Ako dodjelimo n brojeva nekim elementima, možemo napraviti konstrukciju koristeći računske operacije modulo n.

- Indukcija često olakšava nalaženje kompliciranijih primjera, pogotovo ako bi ih bilo jako teško zapisati ili iskazati za općeniti n.

- Ako treba dokazati da postoji konfiguracija sa vrijednosti barem x, korisno je izračunati prosjek te vrijednosti za sve konfiguracije. Ako je ona $\geq x$, znamo da i postoji tražena konfiguracija.

2 Primjeri

1. Koji je maksimalan broj točaka unutar jednakostraničnog trokuta sa stranicom 1 tako da su sve točke međusobno udaljene za barem $\frac{1}{3}$

   Rješenje: Ako podijelimo trokut na 4 sukladna manja jednakostranična trokuta sa stranicom duljine $\frac{1}{3}$, jedan će trokut morati sadržavati barem dvije točke. Te dvije točke su udaljene za najviše $\frac{1}{3}$.

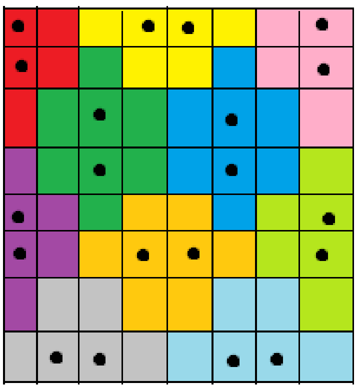
2. Koliko najviše elemenata skupa $1, ..., 100$ možemo odabrati tako da nijedan broj ne dijeli drugoga?

   Rješenje: Podijelimo taj skup na podskupove tako da unutar svakog podskupa svi brojevi imaju isti najveći neparan djelitelj.

   $$\{\{1, 2, 4, ...\}, \{3, 6, 12, ...\}, \{5, 10, 20, ...\}, ...\}$$

   Tih podskupova imamo 50. Unutar svakog podskupa, bilo koja dva broja se međusobno dijele, stoga ne možemo imati više od 50 brojeva. Taj broj se može i postići: odaberimo skup $\{51, 52, ..., 100\}$.

3. Koliko najmanje polja ploče 8×8 moramo obojati tako da svako polje (obojano ili neobojano) ima obojanog susjeda?

   Rješenje: Promotrimo sliku gore. Podijelili smo tablicu na 10 regija. Budući da svako polje ima susjedno neko polje sa točkom, jasno je da je dovoljno obojati 20 polja. S druge strane, odaberemo li manje od 20 polja, neka regija će u sebi imati najviše jedno obojano polje, što nije moguće jer neko od dva polja sa točkom unutar te regije neće imati obojanog susjeda.

4. Na matematičkom natjecanju bilo je 5 zadataka i svaki zadatak nosi maksimalno 6 bodova. Koliko je najviše moglo biti natjecatelja, ako znamo da nijedna dva natjecatelja nemaju isti broj bodova na dva zadatka?

   Rješenje: Kada bi bilo barem 50 natjecatelja, postojalo bih ih 8 koji imaju isti broj bodova na prvom zadatku. Među njima, dvoje sigurno ima isti broj bodova i na drugom zadatku. Pokažimo da može biti 49 natjecatelja. Pridružimo svakom natjecatelju jedinstveni par brojeva (a, b), pri čemu su $a, b \in \{0, ..., 6\}$.

   Neka je natjecatelj (a, b) postigao na zadatku t ukupno $a + bt \pmod 7$ bodova. Pokažimo da nijedna dva natjecatelja nemaju isti broj bodova na dva zadatka. Pretpostavimo da za $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2), t \neq T$ vrijedi:

$$a_1 + b_1 t \equiv a_2 + b_2 t \pmod 7$$

$$a_1 + b_1 T \equiv a_2 + b_2 T \pmod 7$$

   Oduzmemo li te dvije jednadžbe, dobijamo:

$$(b_2 - b_1)(t - T) \equiv 0 \pmod 7 \implies b_1 \equiv b_2 \pmod 7 \implies a_1 \equiv a_2 \pmod 7$$

   Što je kontradikcija sa $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$.

3 Zadaci I

1. Dan je neusmjereni graf sa 100 vrhova i m bridova. Koliki je minimalan m tako da uvijek postoji put između svaka dva vrha, neovisno o rasporedu bridova? Koliki je minimalan m tako da postoji raspored bridova tako da su svi vrhovi povezani?

2. Koliko najviše lovaca možemo staviti na šahovsku ploču tako da se oni međusobno ne napadaju? Kraljica?

3. Za koje k možemo postaviti konačno kraljica na beskonačnu ploču tako da svaka napada točno k drugih kraljica? Beskonačno kraljica?

4. Na nekim poljima 10×10 ploče se nalazi korov. Korov se proširuje na neko polje ako već postoji korov na barem dva njemu susjedna polja (tako da dijele stranicu). Koliko minimalno treba biti početnih polja sa korovom da bi se on proširio na cijelu ploču?

5. Koliko najviše polja 50×50 tablice možemo obojati u crno tako da ne postoji pravokutni trokut sa svim crnim vrhovima?

6. U grafu sa n vrhova, svaki vrh ima stupanj barem $\frac{n}{2}$. Dokaži da postoji ciklus veličine n.

7. Dana je 1001×1001 tablica. Koliko minimalno polja treba obojati u crno tako da je za svaka dva susjedna polja barem jedno crno i u svakih 6 uzastopnih polja (bilo vertikalnih ili horizontalnih) postoje bar dva uzastopna crna polja?

8. 9×2008 tablica je popunjena sa brojevima $1, ..., 2008$ tako da se svaki broj pojavljuje točno 9 puta i tako da se u svakom stupcu brojevi razlikuju za najviše 3. Neka je S minimalan zbroj brojeva u nekom stupcu. Koliki najviše moze biti S?

9. U matematičkoj lutriji listić ima 10 brojeva iz skupa $\{1, ..., 100\}$ te se izvlači ukupno 10 brojeva. Pobjednički listić je onaj koji ne sadrži nijedan od izvučenih brojeva. Koliki je najmanji broj listića koji moramo kupiti da bi osigurali pobjedu?

10. Koliko nam minimalno boja treba da obojamo bridove potpunog grafa sa 1000 vrhova tako da nijedna dva istobojna brida ne dijele vrh?

11. Dan nam je potpuni graf sa 1000 vrhova. Dozvoljena je operacija da iz jednog ciklusa duljine 4 maknemo jedan brid. Koliko najviše bridova možemo maknuti?

12. Dana je $(2k+1) \times (2k+1)$ šahovnica sa crnim kutevima. Za koje k možemo pokriti sva crna polja sa disjunktnim L-trinominama? Koliko nam najmanje treba trinomina?

13. U nogometnom turniru, pobjeda donosi 3 boda, remi 1 bod i poraz 0 bodova. Koliki je minimalan broj timova na turniru tako da tim koji ima najmanje pobjeda može svejedno završiti sa najviše bodova?

4 Protok kroz graf

Jako često zadatke možemo modelirati kao probleme na grafovima. Jedan od najpoznatijih optimizacijskih problema na grafovima je traženje maksimalnog protoka kroz graf.

Promotrimo sljedeći problem: Dan nam je usmjereni graf sa n vrhova, označenih brojevima $1, ..., n$. Zamislimo da nam protječe voda kroz taj graf na način da ulazi u vrh sa brojem 1 i izlazi iz vrha sa brojem n.

Svaki brid izmedu dva vrha i i j predstavlja cijev koja ima određeni kapacitet c_{ij} i njime protječe ukupno x_{ij} vode iz vrha i u vrh j. Nas zanima koliki je maksimalni mogući protok između vrhova 1 i n.

To se može promotriti kao linearni program gdje nam je v vrijednost tog protoka:

$$\max v$$

tako da:

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$$

$$\sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = \begin{cases} v & i = 1 \\ 0 & 1 < i < n \\ -v & i = n \end{cases}$$

Valja primijetiti da iako je v jedinstveno određen, on se može postizati za razne x_{ij}.

4.1 Minimalni rez = maksimalni protok

Promotrimo podskup vrhova S koji sadrži 1, ali ne sadrži n te neka je:

$$C(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} c_{ij}$$

$C(S)$ nazivamo rez. Tada je $v \leq C(S)$ za bilo koji S, jer voda mora izaći iz S koristeći neku od cijevi koje idu iz S.

Formalnije,

$$v = \sum_{i \in S} \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} - \sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} c_{ij} = C(S) \tag{1}$$

Primijetimo da se jednakost postiže ako i samo ako je $x_{ij} = c_{ij}$ za $i \in S, j \notin S$ te $x_{ij} = 0$ za $i \notin S, j \in S$

Teorem 1 (Teorem o minimalnom rezu i maksimalnom protoku)**.** *Ako su kapaciteti c_{ij} cjelobrojni, postoji S tako da je $C(S)$ jednak maksimalnom protoku kroz graf. Štoviše postoji protok kroz graf tako da $x_{ij} \in \mathbb{N}_0$*

Dokaz: To se može dokazati algoritamski, koristeći **Ford-Fulkerson** algoritam. Na početku postavimo $x_{ij} = 0$.

U svakoj iteraciji mi ćemo pronaći put od 1 do n i tim putem ćemo poslati jednu jedinicu vode. Time povećavavamo trenutni protok kroz graf mijenjajući x_{ij} za ± 1 pa će x_{ij} u svakom trenutku biti cijeli brojevi.

U svakoj iteraciji definirajmo skup S rekurzivno:

- Neka je $1 \in S$.
- Ako $i \in S$, $j \notin S$, $x_{ij} < c_{ij}$, dodajmo j u S (možemo poslati još vode iz i u j)
- Ako $i \in S$, $j \notin S$, $x_{ji} > 0$, dodajmo j u S (možemo se predomisliti i vodu koju šaljemo iz j poslati negdje drugdje)

To su svi vrhovi do kojih je moguće povećati protok. Ako mi se na kraju iteracije n nalazi u S, mogu povećati trenutni protok kroz graf za 1, budući da su $x_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}$. Ako $n \notin S$, naš S definira rez koji je jednak trenutnom protoku kroz graf te zaključujemo da je taj protok maksimalan.

Kako uvijek povećavamo protok za 1, algoritam će se izvršiti nakon konačno mnogo koraka.

Ovaj teorem je jako koristan za probleme koji se mogu modelirati kao traženje maksimalnog protoka na grafu. Pretpostavimo li da je maksimalni protok manji od n, onda sigurno znamo da postoji rez koji je manji od n što je često netrivijalna tvrdnja koja može biti izrazito korisna. Katkada je lakše koristiti činjenicu da postoji rez koji je manji od n nego da ne postoji protok koji je barem veličine n.

4.2 Maksimalno uparivanje

Zanimljiv srodan problem je problem maksimalnog uparivanja. Promotrimo sljedeći problem:

Imamo n muškaraca i n žena i za svaki par znamo žele li biti u braku ili ne. Mi bismo htjeli vjenčati neke muškarce i žene tako da svaki par želi biti u braku i da pritom vjenčamo što više parova. Taj se problem naziva problem maksimalnog uparivanja.

Postoji koristan teorem koji nam kaže da možemo upariti sve muškarce i žene ako i samo ako svaki podskup od muškaraca (recimo da ih je k) ukupno želi barem k žena. Formalnije:

Teorem 2 (Hallov bračni teorem). *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $E \subset \{(i,j) : i,j \in \{1,...,n\}\}$. Tada postoji bijekcija $f : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ takva da za svaki $k \in \{1,...,n\}$ imamo $(k, f(k)) \in E$ ako i samo ako za svaki $S \subset \{1,...,n\}$ imamo $|d(S)| \geq |S|$, pri čemu je $d(S) = \{i \in \{1,...,n\} : j \in S \, t.d. \, (i,j) \in E\}$.*

Dokaz: Jedan smjer je jasan; ako skup od k muškaraca želi ukupno manje od k žena, ne možemo ih sve upariti. Pretpostavimo sada da za svaki skup od k muškaraca, oni ukupno žele barem k žena.

Modelirajmo ovo kao problem maksimalnog protoka na grafu. Napravimo bipartitni graf sa muškarcima s jedne strane (vrhovi $m_1, m_2, ..., m_n$) i sa ženama sa druge strane $(\check{z}_1, ..., \check{z}_n)$, te povežimo m_i sa $\check{z}_j$ bridom beskonačnog kapaciteta ako i-ti muškarac i j-ta žena žele biti u braku.

Također, spojimo vrh I (izvor) sa svim muškarcima te vrh O (odvod) sa svim ženama. Ti bridovi neka nam imaju kapacitet 1. Ako postoji maksimalno uparivanje, onda nam postoji protok veličine n (samo pošaljemo n jedinica vode putevima $I \to m_i \to \check{z}_j \to O$). S druge strane, ako je maksimalan protok n, znamo da postoji takav protok sa cjelobrojnim x_{ij} te će on nam dati maksimalno uparivanje.

Pretpostavimo sada da ne postoji maksimalno uparivanje. To znači da je maksimalan protok kroz graf manji od n pa po teoremu o minimalnom rezu i maksimalnom protoku znamo da postoji rez $C(S) < n$. Označimo sa $M_S, \check{Z}_S$ muškarce i žene koji se nalaze u S. Budući da je $C(S) < n$ znamo da ne postoji brid iz M_S prema $\check{Z}$ $\check{Z}_S$ jer ti bridovi imaju beskonačan kapacitet. Također imamo:

$$C(S) = |\check{Z}_S| + |M \setminus M_S| = |\check{Z}_S| + n - |M_S| < n \implies |M_S| > |\check{Z}_S|$$

No time dobivamo kontradikciju sa pretpostavkom, jer svi muškarci iz M_S žele samo žene iz $\check{Z}_S$, a $|M_S| > |\check{Z}_S|$.

Ovaj teorem je izrazito koristan jer nam daje nužan i dovoljan uvjet za postojanje maksimalnog uparivanja. Također i sam dokaz je poučan jer pokazuje kako možemo modelirati neki problem kao problem maksimalnog protoka na grafu te iskoristiti teorem o minimalnom rezu i maksimalnom protoku.

5 Zadaci II

1. Tablica $m \times n$ je popunjena brojevima $1, ..., n$ tako da se svaki pojavljuje točno m puta. Dokaži da se stupci mogu permutirati tako da se u svakom redu nalaze brojevi $1, ..., n$.

2. Špil od 52 karte podijeljen je na 13 hrpa sa po 4 karte svaka. Dokaži da se iz svake hrpe može odabrati jedna karta tako da imamo od svega po jedan (2, 3, ..., 10, dečko, kraljica, kralj, as).

3. Dan je neusmjereni graf sa n vrhova i m bridova. Sada želimo sve bridove usmjeriti na način da iz svakog vrha ide barem k bridova. Dokaži da se to može napraviti ako i samo ako za svaki podskup vrhova U vrijedi $d(U) \geq k|U|$, pri čemu je $d(U)$ broj bridova koji imaju bar jedan kraj u U.

4. Dani su brojevi k i n tako da $k > n!$. Dokaži da postoje različiti prosti brojevi $p_1, ..., p_n$ tako da $p_i | k + i$.

5. Na nekom planetu postoji 2^N zemalja ($N > 3$). Svaka zemlja ima zastavu dimenzija $1 \times N$ koja se sastoji od točno N kvadratića bijele ili crvene boje. Sve zemlje imaju različite zastave. Kažemo da je skup od N zastava raznovrstan ako se zastave mogu posložiti u $N \times N$ kvadrat tako da su svi kvadratići na glavnoj dijagonali iste boje. Odredi najmanji M tako da među bilo kojih M različitih zastava postoji raznovrstan skup od N zastava.

6. Zadana je $r \times s$ tablica čija su polja obojana ili u crno ili u bijelo. Neka je $R(i)$ broj crnih polja u i-tom retku i $S(i)$ broj crnih polja u i-tom stupcu. Dokaži da postoji crno polje (i, j) tako da vrijedi

$$r\, R(i) \geq s\, S(j)$$