Invarijante i monovarijante

Uvod

Invarijanta je veličina koja se, tijekom nekog procesa, ne mijenja, a monovarijanta veličina čija vrijednost opada ili raste (ne raste ili ne opada). U ovom predavanju obradit ćemo veći broj logičko-kombinatornih zadataka za čije rješavanje bitno koristimo nalaženje neke invarijante, odnosno monovarijante.

Uvodni zadatci

1. Na školskoj ploči je napisano 5 brojeva. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo bilo koja tri broja, nazovimo ih x, y i z i mijenjamo ih u $2x - y$, $2y - z$ i $2z - x$. Ako su na početku bili napisani brojevi 7, 10, 12, 15, 17, možemo li, uzastopnim ponavljanjem tog postupka, doći do petorke brojeva:

   a) 6, 8, 10, 18, 19 ?

   b) 9, 11, 13, 14, 16 ?

   Rješenje. Za oba zadatka odgovor je negativan.

   a) Primijetimo da, prilikom svake transformacije, broj parnih (i neparnih) brojeva na ploči ostaje isti. Kako su na početku na ploči napisana dva parna broja, nije moguće doći do petorke s četiri parna broja.

   b) Primijetimo da, prilikom svake transformacije, zbroj brojeva na ploči ostaje isti. Kako je na početku zbroj brojeva na ploči jednak 61, nije moguće doći do petorke brojeva sa zbrojem 63.

   Na kraju, uočimo da invarijanta korištena u a) dijelu zadatka (broj parnih brojeva) nije od pomoći u b) dijelu zadatka i, obratno, invarijanta korištena u b) dijelu zadatka (zbroj svih brojeva), nije od pomoći u a) dijelu zadatka.

2. a) Na školskoj ploči su zapisani brojevi od 1 do 12345. Kažnjeni učenik Berigoj mora najprije obrisati bilo koja dva broja i zamijeniti ih apsolutnom vrijednošću njihove razlike. I onda taj postupak mora ponavljati sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Tog se dosadnog posla može riješiti samo ako zna mora li taj zadnji broj biti paran ili neparan (uz obrazloženje, naravno). Pomozi Berigoju i riješi taj zadatak.

   b) Poopćite zadatak, na način da su na školskoj ploči na početku brojevi od 1 do n. Nađi sve n za koje je odgovor da je zadnji broj paran, kao i sve n za koje je odgovor da je zadnji broj neparan. Ima li takvih n za koje rezultat ovisi o izboru brojeva koje brišemo?

   Ideja rješenja. Invarijanta transformacije je parnost broja neparnih brojeva. Ukoliko na početku imamo neparan broj neparnih brojeva, i na kraju će ih biti neparno, tj. onaj zadnji broj će biti neparan; u protivnom će biti paran.

3. Ploča 8×8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno ?

   Rješenje se može naći na http://www.antonija-horvatek.from.hr/ (županijsko natjecanje 2013./14. za 1.r. SŠ).

4. Na otoku Velika Hrid živi 8 plavih, 10 crvenih i 12 zelenih kameleona. Kada se susretnu dva kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije izvjesnog broja susreta, svi kameleoni budu istobojni?

   Rješenje. Brojevi plavih, crvenih i zelenih kameleona 8,10,12 čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3. Nakon svakog susreta, broj plavih, crvenih i zelenih kameleona će opet činiti potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3, pa nije moguće da svi kameleoni budu istobojni.

   Dodatni zadatak. Poopći zadatak - neka je p plavih, c crvenih i z zelenih kameleona. Kakvi moraju biti brojevi p, c i z da odgovor bude pozitivan?

   Odgovor. Da bi odgovor bio pozitivan, brojevi p, c i z ne smiju činiti potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3, tj. dva od ta tri broja moraju davati isti ostatak pri dijeljenju s 3. Rješenje prepuštamo čitatelju, ali svakako napominjemo da je potrebna konstrukcija susreta kameleona koja vodi do toga da svi kameleoni mogu postati istobojni. Na ovom primjeru je zgodno naglasiti kako nam nalaženje invarijante omogućava dokazati da, uz određene uvjete, nije moguće ostvariti zadani cilj, ali dokaz da je, uz odgovarajuće uvjete, cilj moguće ostvariti, nije moguć korištenjem invarijante - potrebno je naći konstrukciju.

5. U Parlamentu države Bekonije svaki član Parlamenta ima točno tri neprijatelja (neprijateljstva su uzajamna). Dokaži da se Parlament može podijeliti u dva doma ("Gornji dom" i "Donji dom") tako da svaki član Parlamenta ima najviše jednog neprijatelja u domu čiji je član.

   Rješenje. Na početku podijelimo članove Parlamenta na bilo koji način u dva doma. Ukoliko svaki član Parlamenta ima najviše jednog neprijatelja u domu čiji je član, zadatak je riješen, a ukoliko nije tako, započinjemo postupak premještanja članova s ciljem da, na kraju, svaki član Parlamenta ima najviše jednog neprijatelja u svom domu. Neka je S zbroj svih neprijateljstava članova istog doma. Prepostavimo da neki član nekog doma ima barem dva neprijatelja u svom domu. Premjestimo ga u drugi dom. Nakon toga će se veličina S smanjiti. Veličina S je uvijek nenegativan cijeli broj i, u nekom će trenutku, dosegnuti svoj minimum. A tada ćemo doći do željene raspodjele unutar dva doma Parlamenta čime je tvrdnja dokazana.

   Primijetimo da smo, u ovom zadatku, dokazujući tvrdnju koristili veličinu koja transformacijom opada - nazivamo je monovarijanta.

6. U ravnini je dano n crvenih i n plavih točaka, tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da možemo nacrtati n dužina od kojih svaka spaja jednu crvenu i jednu plavu točku (svaka točka je rubna za jednu dužinu) koje se ne presijecaju.

   Rješenje. Kao i u prethodnom zadatku, za dane točke, najprije spojimo točke dužinama proizvoljno. Ako se nikoje dvije ne sijeku, gotovi smo. Ako se neke dvije, npr. $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ (A i D iste boje, kao i B i C) sijeku, onda obrišimo te dvije i zamijenimo ih s $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ i postupak, ako je potrebno, nastavljamo. Promotrimo veličinu M koja predstavlja zbroj duljina svih dužina. Iz nejednakosti trokuta (nacrtajte sliku !) slijedi da M opada. Kako je broj mogućih konfiguracija konačan, moramo doći do minimalne vrijednosti od M i tada naša konfiguracija neće imati presječne točke.

7. Zemljište dimenzija $n \times p$ podijeljeno je na np čestica - jediničnih kvadratića. Svaka je čestica u početnom stanju ili obrasla u korov ili je očišćena - na početku je m čestica obraslo u korov. Korov se širi na susjedne čestice na sljedeći način: svake godine one čestice koje su imale dvije susjedne čestice (sa zajedničkom stranicom) obrasle u korov i same obrastu u korov.

   Odredi najmanji m za koji postoji početni raspored u korov obraslih čestica takav da, nakon konačnog broja godina, cijelo zemljište mora obrasti u korov.

   Rješenje - ideja. Odgovor je $m = \left[\frac{n+p+1}{2}\right]$.

   Zadatak se sastoji od dva dijela:

   1. Za gore navedeni m, odrediti polaznu "poziciju" iz koje će cijelo zemljište obrasti u korov.

   2. Dokazati da za manji m, neovisno o polaznoj "poziciji", zemljište nikada neće obrasti u korov. Primijetite da duljina granice zemljišta u korovu ne raste (monovarijanta!) - to je ključan korak u dokazu.

   Važna napomena: Prilikom dokazivanja tvrdnje 2., ne smijete se služiti kvazi-argumentima tipa: "očito" je da je najpovoljnija startna pozicija neka konkretna i onda iz toga izvlačiti zaključke! Na žalost, takvi se "argumenti" često znaju vidjeti u učeničkim zadaćama na natjecanju.

Zadatci za vježbu

8. Čarobnjak iz priče "Mačak u čizmama" ima vještinu pretvaranja miševa u lavove i obratno. Za večeru je pozvao 1 lava i 11 miševa i posjeo ih oko okruglog stola. Ali čarobnjak svoju vještinu može jednokratno primijeniti samo na tri susjedna gosta. I onda je primijeniti opet, po istom pravilu. I opet, i opet... Može li čarobnjak, uzastopnim ponavljanjem te operacije, postići da oko stola bude opet 1 lav i 11 miševa, ali tako da lav sjedi na mjestu neposredno pored onog na kojem je sjedio na početku?

   Rješenje - ideja. Obojimo mjesta na kojem sjede životinje u tri boje naizmjenično: crven, bijeli, plavi, crven, bijeli, plavi...

9. Na po volji velikoj kvadratnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja kvadrata 3×3, po jedan u svako polje. U svakom koraku možemo s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je preskočen uklanjamo. Može li ova "igra" završiti sa samo jednim žetonom na ploči ?

   Rješenje - ideja. Obojimo polja u tri boje tako da "dijagonalno" imamo istu boju.

Dodatni zadatak - poopći na kvadrat $n \times n$ s n^2 žetona!

Odgovor. Moguće je ako i samo ako n nije djeljiv s 3. Da biste dokazali da nije moguće za n koji je djeljiv s 3, trebate se koristiti gore opisanim bojanjem i nalaženjem invarijante.

Da biste dokazali da za ostale n jest moguće, morate konstruirati postupak (induktivno).

Rješenja zadatka možete naći na internetu, znajući da se radi o zadatku 3. s IMO-a 1993.

10. Na beskonačnoj ploči, sastavljenoj od jediničnih kvadratića, konačan broj kvadratića obojan je crnom bojom (ostala polja su bijela). U svako polje bijele boje upisan je broj susjednih polja (sa zajedničkom stranicom) crne boje, a u svako polje crne bolje upisan je broj susjednih polja bijele boje. Dokaži da je zbroj svih brojeva na ploči uvijek djeljiv s 4.

    Rješenje - ideja. Ukoliko su sva polja na ploči bijela, onda u svim poljima piše 0, zbroj svih tih brojeva je naravno 0, što je djeljivo s 4. Do svake "konfiguracije" s konačno mnogo crnih polja može se doći bojanjem jednog po jednog bijelog polja u crno polje. Treba pokazati da se, prilikom svake takve transformacije, zbroj svih brojeva ne mijenja ili se mijenja za višekratnik broja 4.

11. Tom i Jerry igraju sljedeću igru: najprije Jerry napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Tom pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki, višestrukim ponavljanjem sljedeće operacije - u jednom koraku on odabire dva broja i zamjenjuje svaki od njih njihovim zbrojem.

    Može li Jerry odabrati takve brojeve da Tom ne može ostvariti svoj naum ili Tom može ostvariti svoj naum, bez obzira koje brojeve Jerry odabere?

    Rješenje. Ako Jerry napiše $2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$, Tom ne može nikada ostvariti svoj naum, jer je broj elemenata maksimalne vrijednosti uvijek paran i nikada ne može biti 9.

    Dodatni zadatak - zamijenite 9 s n i riješite općeniti zadatak.

    Za svaki neparni n, Jerry uvijek može napisati brojeve tako da Tom ne može ostvariti svoj naum (dokaz je istovjetan kao u prvotnoj verziji zadatka). Za parne n-ove, Tom može ostvariti svoj naum, kako god Jerry odabrao brojeve. Da biste to dokazali, trebate napraviti konstrukciju. Taj dio zadatka je teži od dijela u kojem dokazujemo da, za neparne n, Jerry "pobjeđuje".

    Zadatak je bio na MEMO ekipnom natjecanju 2008., a rješenje možete naći na linku: http://kag.upol.cz/memo/texty

12. U svakom koraku iz para prirodnih brojeva (m, n) dobivamo novi par kao

    $(m - n, n)$ ili $(m + n, n)$ ili (n, m). Odredite nužne i dovoljne uvjete da, ponavljanjem opisanog postupka, iz para prirodnih brojeva (a, b) možemo dobiti (c, d)?

    Rješenje. Invarijanta transformacije je najveći zajednički djeljitelj brojeva m i n.

    Iz para (a, b), dakle, nije moguće dobiti (c, d) ako $D(a, b) \neq D(c, d)$. S druge strane, ako je $D(a, b) = D(c, d) =: D$, lako je konstruirati slijed "poteza" kojima se, naprije iz (a, b) dobiva par (D, D) (Euklidov algoritam), te potom iz (D, D) dobiva par (c, d) ("inverzni" Euklidov algoritam).

13. a) Dokaži da skakač (skačući po pravilima kao šahovska figura) ne može obići svako polje ploče $m \times n$ (m i n neparni) i vratiti se na početno polje.

    b) Može li skakač obići svako polje ploče 4×8 točno jednom i vratiti se na početno polje?

    Rješenje. a) dio zadatka je trivijalan; obojimo polje crno-bijelo na šahovski način i vidimo da svakim skokom skakač mijenja boju polja, a morao bi skočiti neparno puta.

    b) dio zadatka je zanimljiviji; opet obojimo polje na šahovski način i, još k tome, podijelimo polja na još jedan način: A sektor sačinjavaju "gornji" i "donji" red, a B sektor dva "srednja" reda. U svakom skoku skakač mijenja boju polja, a osim toga skakač iz sektora A može ići samo u sektor B. Da bi prošao sva polja točno jednom (i vratio se na početno polje), skakač se mora iz sektora B vratiti odmah u sektor A što znači da, skače li na taj način, niti na jedno polje jedne boje (a kamoli na sva) u sektoru B ne može skočiti (niti na sva polja u sektoru A, ali to više nije bitno).

    Skakačeve ture vrlo su poznat matematički problem (neke osnovne informacije možete naći na wikipediji; proguglajte Knight's tour). Razlikujemo zatvorene ture (one u kojima se skakač mora vratiti na početno polje) i otvorene (one u kojima ne mora). Problemi u zadatku 13. su problemi nepostojanja zatvorene skakačeve ture.

    Allen J. Schwenk (1991) je u svom članku "Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?". Mathematics Magazine: 325–332 (možete ga lako naći na internetu) dokazao da je, za ploču $m \times n$, $m \leqslant n$, zatvorena skakačeva tura moguća ako i samo ako nije ispunjen barem jedan od sljedećih uvjeta:

    (i) m i n su oba neparni,

    (ii) $m = 1$, $m = 2$ ili $m = 4$,

    (iii) $m = 3$ i $n = 4$, $n = 6$ ili $n = 8$.

14. Na ploči su napisani a, b, c i d cijeli brojevi koji nisu svi jednaki. Amon radi sljedeću transformaciju: u svakom koraku brojeve na ploči a, b, c, d zamjenjuje brojevima $a - b$, $b - c$, $c - a$ i $d - a$. Dokaži da će, nakon konačno mnogo koraka (ako Amon, u međuvremenu umre, zamjenit ća ga njegov nasljednik Braslav, a njega, po potrebi, njegov nasljednik Celestin, itd., itd...), apsolutna vrijednost jednog broja biti veća od 2015!.

    Rješenje - ideja. Neka je (a_n, b_n, c_n, d_n) četvorka brojeva nakon n iteracija.

    Može se pokazati da vrijednost $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ (kvadrat "udaljenosti" od ishodišta u 4-dimenzionalnom prostoru) raste neograničeno, od kuda slijedi tvrdnja zadatka.

    Potpuno rješenje zadatka možete naći u knjizi Arthur Engel: "Problem Solving Strategies", Springer.

15. Na školskoj ploči napisano je n brojeva: x_1,...,x_n. U svakom koraku Svitogor briše brojeve a i b i zamjenjuje ih brojem $ab + a + b$. Na kraju na ploči ostaje

jedan broj. Dokaži da on ne ovisi o redoslijedu brisanja brojeva i ustanovi čemu je jednak u ovisnosti o x_1, x_2,...,x_n.

Rješenje. S obzirom da se a i b zamjenjuju s $(a+1)(b+1)-1$, umnožak $(x_1+1)(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_k+1)$, gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ brojevi na ploči, ostaje nepromijenjen. Zato je broj koji ostaje na ploči jednak $(x_1+1)(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n+1)$.

16. U svako polje tablice 4×4 upisano je 15 brojeva 1 i jedan broj -1 koji se nalazi na presjeku prvog retka i drugog stupca. U svakom koraku vršimo sljedeću transformaciju: množimo s -1 sve članove jednog stupca, jednog retka ili jednog pravca paralelnoj nekoj dijagonali (uključujući i samo kutna polja). Možemo li, ponavljanjem takvih transformacija, dobiti 1 u svim poljima ploče ?

    Rješenje - sami. Obojite ploču u dvije boje na pametan način. Rješenje prepuštamo čitatelju.

17. Dana je pravokutna ploča dimenzija 20×12 (dulja stranica je horizontala) podijeljena na 240 jediničnih kvadrata. Novčić se može premjestiti s jednog kvadrata na drugi ako i samo ako je udaljenost središta kvadrata $\sqrt{97}$. Možemo li, na taj način, premjestiti novčić iz kvadrata koji odgovara vrhu u donjem lijevom kutu u novčić koji odgovara donjem desnom kutu?

    Rješenje - sami. Savjet - imitirajte ideju iz zadatka 13.b).

    Rješenja zadatka možete naći na internetu, znajući da se radi o zadatku 1.c). s IMO-a 1996.

18. $2n$ veleposlanika pozvano je na banket. Svaki veleposlanik ima najviše $n-1$ neprijatelja. Dokaži da se veleposlanici mogu razmjestiti oko okruglog stola tako da nitko ne sjedi pored svog neprijatelja.

    Rješenje. Zadatak rješavamo istim pristupom kao i zadatke 5. i 6. (iako je ovaj zadatak bitno zahtjevniji).

    Dakle, na početku veleposlanike razmjestimo oko stola na proizvoljan način. S H označimo broj neprijateljskih parova u rasporedu oko stola. Moramo naći algoritam kojim se H smanjuje čim je $H>0$. Pretpostavimo da je $H>0$ i da je (A,B) neprijateljski par, pri čemu B sjedi desno od A. Taj par treba razdvojiti uz najmanju moguću poremetnju ostalih. Krenuvši po luku kružnice u pozitivnom smjeru tražimo par susjeda (A',B'), B' desno od A', takav da su (A,A') i (B,B') prijateljski parovi. Takav par moramo naći jer A ima barem n prijatelja, a desno od njih ne mogu svi biti neprijatelji od B (jer B ima najviše $n-1$ neprijatelja).

    Nakon što smo našli par (A',B'), "okrećemo" cijeli luk BA' i dobivamo novi raspored sjedenja u kojem je H smanjen. (naime, svi "odnosi" na luku BA' ostaju sačuvani, kao i na luku $B'A$, dok su parovi novih susjeda (A,A') i (B,B') oba prijateljski parovi.)

    Preporučamo da nacrtate sliku!

19. Svakom vrhu peterokuta pridružen je neki cijeli broj tako da je zbroj svih 5 takvih brojeva pozitivan. Ako je neki broj negativan, nazovimo ga y, tada promatramo tri uzastopna vrha s brojevima x, y, z i zamjenjujemo te brojeve s $x+y$, $-y$, $z+y$, redom. Tu operaciju ponavljamo sve dok je barem jedan od 5 brojeva negativan. Hoće li taj postupak ikad završiti?

Odgovor. Postupak će uvijek završiti.

Treba naći monovarijantu !

Rješenje zadatka možete naći u knjizi Arthur Engel: "Problem Solving Strategies", Springer, ali i na internetu jer se radi o zadatku s IMO-a 1986. (radi se o najtežem zadatku na tom IMO-u; možete li i vi biti poput 11 natjecatelja koji su riješili taj zadatak?)

20. Prvi kvadrant koordinatnog sustava podijeljen na jedinične kvadrate. Na nekima od njih nalaze se žetoni. U svakom potezu je dozvoljeno sljedeće: ako postoji polje sa žetonom takvo da je susjedno desno i gornje polje "slobodno", dozvoljeno je maknuti žeton s tog polja i dodati po jedan žeton na gornje i desno polje. Cilj "igre" je, ponavljanjem tog postupka, skup od šest jediničnih kvadrata označenih na slici (nema slike - morate je sami nacrtati čitanjem Primjedbe ispod zadatka!) "osloboditi" žetona.

    a) Je li moguće ostvariti cilj igre, ako su u početnoj poziciji 6 žetona nalazi upravo na tim označenim poljima?

    b) Je li moguće ostvariti cilj igre, ako su u početnoj poziciji nalazi 1 žeton, i to "rubnom donjem lijevom" polju?

    Primjedba. Ovdje nedostaje slika! Pokušat ću je opisati riječima. Označena polja su tri najdonja u prvom stupcu, dva najdonja u drugom stupcu i najdonje u trećem stupcu.

    Rješenje a) dijela zadatka. Rubnom donjem lijevom polju pridružimo vrijednost 1. Polju iznad njega i polju desno od njega (njemu susjednim poljima) pridružimo vrijednost $\frac{1}{2}$, njima susjednim poljima "gore" i "desno" pridružimo vrijednost $\frac{1}{4}$, itd.; tako dobivamo da na poljima s istom "dijagonalom" imamo pridruženu istu vrijednost (znam da bi slika dobro došla).

    Očito je invarijanta svake transformacije ukupni zbroj brojeva na poljima na kojima su žetoni. Taj je zbroj u početku jednak $\frac{11}{4}$. S obzirom da je zbroj svih brojeva u prvom kvadrantu jednak 4 (zbroj beskonačnih geometrijskih redova), onda je zbroj brojeva u neoznačenim poljima $\frac{5}{4} \neq \frac{11}{4}$ pa cilj igre nije moguće ostvariti.

    Rješenje b) dijela zadatka. Ovo je zahtjevniji problem. Definirajmo sektore A, B, C i D na sljedeći način: sektor A predstavlja označenih 6 polja, sektor B predstavlja preostala polja u prvom stupcu, sektor C preostala polja u prvom retku, a sektor D sva polja koja nisu u sektoru A, B i C (slika je opet poželjna, nacrtajte je!).

    Pretpostavimo sada da smo ostvarili cilj igre. Tada se u sektoru B nalazi najviše jedan žeton čija vrijednost može biti najviše $\frac{1}{8}$; analogno se u sektoru C nalazi najviše jedan žeton čija vrijednost može biti najviše $\frac{1}{8}$. Ostali žetoni moraju biti u sektoru D. Kako je broj žetona konačan, zbroj svih njihovih vrijednosti mora biti manji od beskonačnog zbroja vrijednosti po svim poljima sektora D koji (izračunajte to!) iznosi $\frac{3}{4}$. Dakle, ukupni zbroj vrijednosti polja na kojima su žetoni je manji od $2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = 1$. Kontradikcija!

21. U čvorovima pravokutne koordinatne mreže $\{(i, j) : i, j \in \mathbf{Z}\}$ za koje je $j \leqslant 0$ možemo postavljati konačni broj žetona na proizvoljan način. U svakom koraku

možemo s nekim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog čvora mreže na slobodni čvor i pri tome žeton koji je preskočen uklanjamo. Možemo li, na ovaj način, sa barem jednim žetonom stići u neki od čvorova za koji je $j \geqslant 5$?

Rješenje. Odgovor je negativan.

Dovoljno je dokazati da ne možemo stići u $(0,5)$. Svakom čvoru koordinatne mreže za koji je $j \leqslant 5$ pridružimo jedan broj. Pridruživanje vršimo na sljedeći način - čvoru (x,y) za koji je $y = |x| + 5 - k$, $k \in \mathbf{N_0}$, pridružujemo q^k. Tako je čvoru $(0,5)$ pridružen broj 1 (slika je poželjna, nacrtajte je!). Sa S označimo zbroj brojeva u kojima se nalaze žetoni.

Kako biramo q? Ideja je ista kao u prethodnom zadatku. Naime, biramo ga tako da, prilikom svakog skoka žetona kojim se približavamo čvoru $(0,5)$, S ne mijenja vrijednost, a to znači da mora biti pozitivno rješenje jednadžbe $q^{n-2} = q^{n-1} + q^n$. Dobivamo da je $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Pritom je očito da se, svakim skokom žetona kojim se udaljavamo od $(0,5)$, zbroj S smanjuje. Dakle, općenito S se ne povećava. Ukoliko bismo sa žetonom došli u $(0,5)$, S bi bio barem 1 jer je vrijednost čvora $(0,5)$ jednaka 1. Ukoliko pokažemo da je S na početku manji od 1, dokazat ćemo da ne možemo doći u čvor $(0,5)$. U tu svrhu izračunat ćemo beskonačni zbroj vrijednosti svih čvorova za koje je $j \leqslant 0$. S obzirom da je broj žetona konačan, S je na početku manji od tog zbroja, odnosno vrijedi

$$S < S_0 + 2(S_1 + S_2 + S_3 + ...),$$

(pri čemu je S_i zbroj vrijednosti polja s apscisom i i negativnom ordinatom), odnosno (koristeći formulu za zbroj beskonačnog geometrijskog reda)

$$S < \frac{q^5}{1-q} + 2 \cdot \frac{q^6 + q^7 + ...}{1-q} = \frac{q^5}{1-q} + 2 \cdot \frac{q^6}{(1-q)^2} = \frac{q^5 + q^6}{(1-q)^2}.$$

Koristeći činjenicu da je $1 = q + q^2$, lagano vidjeti da je desna strana gornje nejednakosti jednaka $\frac{q^4}{(q^2)^2} = 1$. Dakle,

$$S < 1.$$

Primjedba. Dakle, žeton nije mogao doći u peti red. Vama ostavljamo da barem jednim žetonom dođete u četvrti red (što je moguće).

22. Na ploči $m \times n$ nalazi se mn žetona koji su s jedne strane bijeli, a s druge crni. Na početku točno je jedan žeton, u kutnom polju, okrenut na crnu stranu. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: uklanjamo "crni" žeton i okrećemo sve njemu susjedne (u poljima sa zajedničkom stranicom) žetone.

Odredi sve parove (m,n) za koje se svi žetoni mogu ukloniti s ploče.

Odgovor. Barem jedan od m i n mora biti neparan.

Da biste dokazali da se, u slučaju kada su m i n oba parni, svi žetoni mogu ukloniti s ploče, trebate naći invarijantu.

Zadatak je dosta zathjevan.

Rješenja zadatka možete naći na internetu, znajući da se radi o zadatku br.28 s IMO Shortlista 1998.

23. Opet imamo isti tip bijelo-crnih žetona! Sada su poredani u redu, njih n; u početku svi "na bijeloj strani". Ponavljamo sljedeću operaciju: uklonimo jedan bijeli žeton (koji nije rubni) i dva susjedna okrenemo (zvuči poznato?).

Dokaži da možemo doći do samo dva žetona u redu ako i samo ako $n-1$ nije djeljiv s 3.

Rješenje - sami. Još jedan lijep, izazovan i dosta zahtjevan zadatak. Za teži dio zadatka (nemogućnost dolaska do dva žetona) treba naći invarijantu.

Rješenja zadatka možete naći na internetu, znajući da se radi o zadatku C5 s IMO Shortlista 2005.