Sve što treba znati o kvadratima

Zadaci

1. (Shortlist 2014 N2) Nađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje je

$$\sqrt[3]{7x^3 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

Rješenje. Uz odgovarajuću supstituciju ($n = x - y$ i $Y = 2y + n$) gornja jednadžba se svodi na jednadžbu

$$Y^2 = (n-2)^2(4n+1).$$

Sada $(4n + 1)$ mora biti kvadrat neparnog broja, tj. $n = m^2 + m \ldots$

2. (Shortlist 2014 N6) Neka su $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ u parovima relativno prosti prirodni brojevi gdje je a_1 prost i $a_1 \geq n+2$. Na segmentu $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ realnog pravca, označimo sve prirodne brojeve koji su djeljivi s nekim od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ove točke dijele I na manje segmente. Dokažite da je suma kvadrata duljina tih segmenata djeljiva s a_1.

3. (Shortlist 2009 N6) Neka je k prirodan broj. Pokažite da ako postoji niz $a_0, a_1, \ldots$ cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n} \quad \text{za sve } n \geq 1,$$

onda je $k - 2$ djeljiv sa 3.

Rješenje. Neka je p prost broj. Vrijedi $a_n = \dfrac{a_1 + 2!2^{k-1} + \cdots + n!n^{k-1}}{n!}$. Dakle, $\forall M \in \mathbb{N}$, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m > m_0$ vrijedi

$$\sum_{j=2}^{m} j!j^{k-1} \equiv -a_1 \pmod{p^M}.$$

To kraće pišemo $\sum_{j=2}^{\infty} j!j^{k-1} = -a_1$ i tu oznaku kao i njene prirodne "zlo-upotrebe" koristimo do kraja dokaza. Općenito nas za $t \geq 0$ zanima izraz $S_t := \sum_{n=0}^{\infty} n^t n!$. Npr. $S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n!$, $S_1 = -1$, $S_2 = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} n!$, $\ldots$. Općenito,

$$S_t = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^t n! - \sum_{i=0}^{t-1} n^i n! = S_{t-1} - \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t}{i} S_i.$$

Indukcijom se pokaže da za svaki S_t vrijedi $S_t = a_t + b_t \sum_{n=0}^{\infty} n!$ za neke cijele brojeve a_t i b_t. Zanima nas za koje t je $b_t = 0$ jer vrijedi sljedeća tvrdnja: Ne postoji cijeli broj m takav da je $\sum_{n=0}^{\infty} n! = m$. Da bi riješili zadatak zapravo je dovoljno pokazati da je b_t neparan za $t \equiv 0, 2 \pmod 3$ (odnosno paran za $t \equiv 1 \pmod 3$). To se može dokazati indukcijom koristeći svojstva binomnih koeficijenata $\binom{t}{i}$ koja se vide iz Pascalovog trokuta.

4. (Shortlist 2013 N4) Odredite postoji li beskonačni niz ne-nul znamenaka $a_1, a_2, \ldots$ i prirodan broj N takava da za svaki prirodan broj $k > N$, broj $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ je savršen kvadrat.

5. (Shortlist 2012 N8) Dokažite da za svaki prosti broj $p > 100$ i svaki cijeli broj r postoje dva cijela broja a i b takva da p dijeli $a^2 + b^5 - r$.

   Rješenje. Treba dokazati da je polinom $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $f(a, b) = a^2 + b^5$ surjekcija. Ideja je precizno ocijeniti koliko velika može biti praslika jednog elementa po f i onda pokazati da ako f nije surjekcija da je suma veličina praslika svih jednočlanih elemanata manja od p^2. Pritom se koristi simetrija $f(\lambda^5 a, \lambda^2 b) = \lambda^{10} f(a, b)$ da bi pokazali da ako c nije u slici od f, da onda ni $\lambda^{10} c$ nije u slici od f za svaki $\lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

6. (Shortlist 2007 N6) Neka je k prirodan broj. Dokažite da broj $(4k^2 - 1)^2$ ima pozitivan djeljitelj oblika $8kn - 1$ ako i samo ako je k paran.

   Rješenje. Dovoljno je dokazati: Za proizvoljne prirodne brojeve x i y, broj $4xy - 1$ dijeli broj $(4x^2 - 1)^2$ ako i samo ako je $x = y$. Tvrdnja se dokazuje metodom beskonačnog spusta, tj. pretpostavi se da postoji par (x, y), $x \neq y$ koji zadovoljavaju tvrdnju te se onda iz para (x, y) konstruira "manji" par (x', y'), $x' \neq y'$, koji također zadovoljava tvrdnju.

7. (Shortlist 2009 N4) Nađite sve prirodne brojeve n za koje postoji niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takav da vrijedi

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1,$$

   za sve k takve da je $2 \leq k \leq n - 1$.

   Rješenje. Za $n = 4$ niz $a_1 = 4$, $a_2 = 33$, $a_3 = 217$ i $a_4 = 1384$ zadovoljava uvjete zadatka. Takav niz ne postoji za $n > 4$. Sljedeća tvrdnja je ključna: Ne postoji par (x, y) parnih prirodnih brojeva takav da $(x + 1)|(y^2 + 1)$ i $(y + 1)|(x^2 + 1)$. Ta tvrdnja se svodi na tvrdnju: Za prirodan broj k jednadžba $k(x + 1)(y + 1) = x^2 + y^2$ nema rješenja u parnim prirodnim brojevima. Ova tvrdnja se dokazuje pomoću beskonačnog spusta (i Vietovih formula).

8. (Shortlist 2010 N4) Za cijele brojeve a i b neka je $P(x) = ax^3 + bx$. Za prirodan broj n kažemo da je par (a, b) n-dobar ako $n|P(m) - P(k)$ implicira $n|m - k$ za sve cijele brojeve m i k. Kažemo da je (a, b) jako dobar ako je (a, b) n-dobar za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n.

   a) Nađite par (a, b) koji je 51-dobar, ali nije jako dobar.

   b) Dokažite da su svi parovi koji su 2010-dobri ujedno i jako dobri.

9. (Shortlist 2010 N5) Nađite sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koje je broj $(f(m) + n)(m + f(n))$ potpun kvadrat za sve prirodne brojeve m i n.

   Rješenje. Odgovor je $f(n) = n + c$, gdje je $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažite prvo: Ako $p|f(k) - f(l)$ za neki prost broj p i prirodne brojeve k i l, onda $p|k - l$.

10. (Shortlist 2009 N2) Kažemo da je prirodan broj N balansiran ako je $N = 1$ ili ako N možemo zapisati kao produkt parnog broja ne nužno različitih prostih brojeva. Za dane prirodne brojeve a i b, promotrimo polinom $P(x) = (x + a)(x + b)$.

   (a) Dokažite da postoje različiti prirodni brojevi a i b takvi da su svi brojevi $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ balansirani.

   (b) Dokažite da ako je $P(n)$ balansiran za sve prirodne brojeve n, da je onda $a = b$.

   Rješenje. a) Dirichletov princip. b) Dirichletov teorem.