MEMO pripreme 2015. Nikola Adžaga, 15. 6. 2015.

Diofantske jednadžbe

Uvod i osnovne ideje

Diofantske jednadžbe mogu se ugrubo podijeliti prema broju rješenja, na one koje ih nemaju, na one koje imaju konačno mnogo rješenja te na one koje imaju beskonačno rješenja. Ovisno o grupi u koju spadaju, koriste se različite tehnike pri rješavanju, pa je stoga iznimno važno **naslutiti koliko rješenja imaju**. To se obično da nalaženjem "malih" rješenja.

Kod diofantskih jednadžbi bez rješenja najčešće se koriste kongruencije. Važno je znati periodičnost ostataka potencija, mali Fermatov i Eulerov teorem, pojam reda elementa, ... Ponekad je korisno uvesti mjeru nepoznanica. Također se ponekad koriste nejednakosti (koje se koriste i kod ostalih diofantskih jednadžbi).

Kod diofantskih jednadžbi s konačno rješenja koriste se nejednakosti, posebno smještanje između kvadrata ili drugih potencija. Npr. jednadžba $n^2 + 1 = m^2$ sigurno nema rješenja u prirodnim brojevima jer je $n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$ za sve prirodne brojeve n. Ponekad se ova metoda primjenjuje na diskriminantu kvadratne jednadžbe čija rješenja trebaju biti cjelobrojna.

Za "tipičnije" nejednakosti, pogledajmo primjer jednadžbe $a + b = ab$. Ona očito nema puno rješenja u prirodnim brojevima, jer je desna strana u pravilu veća od lijeve. Dijeljenjem s ab dobivamo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, pa ako su $a, b \geqslant 3$, onda je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{2}{3}$. Dakle, barem je jedan od brojeva a i b manji od 3. Sad lako nalazimo da je jedino rješenje $a = b = 2$. Kod težih jednadžbi treba koristiti simetriju, odnosno primijetiti da BSOMP $a \geqslant b$, pa je upravo $b \leqslant 2$. Na kraju se treba sjetiti permutacija rješenja.

Također, često se koristi da je prirodan broj veći ili jednak od svog djelitelja. Ovo se često koristi skupa s linearnim kombinacijama. Npr. jednadžba $3ab - b = a^3 - a^2 - a - 1$ u cijelim brojevima svodi se na traženje prirodnih brojeva a takvih da $3a - 1 \mid a^3 - a^2 - a - 1$. Iz toga linearnim kombinacijama slijedi da $3a - 1 \mid 3(a^3 - a^2 - a - 1) - a^2 \cdot (3a - 1) = -(2a^2 + 3a + 3)$. Ponavljanjem ovog postupka (spuštanje stupnja) slijedi da $3a - 1 \mid 38$, pa je $a \in \{0, 1, -6, 13\}$, odnosno, rješenja su $(0, 1), (1, -1), (-6, 13), (13, 53)$.

Osim toga, korisno je poznavanje Henselove, odnosno leme o podizanju eksponenta, kao i raznih činjenica o kvadratnim ostacima, te dobro poznate činjenice da $x^2 + 1$ nema djelitelja oblika $4k + 3$.

Kod diofantskih jednadžbi s beskonačno rješenja koristi se indukcija, a za dokazivanje da nema rješenja izvan nekih klasa, koristi se svojevrstan princip ekstrema i beskonačnog spusta – pretpostavi se da postoje neka druga rješenja, odabere se rješenje minimalno u nekom smislu, a onda se konstruira "manje" rješenje čime se dobiva kontradikcija. Tu spada npr. Vièta jumping.

Zadaci

1. Dokaži da jednadžba $x^5 + y^5 + z^5 = 20152015$ nema cjelobrojnih rješenja. *(1. s tuluma) (Mala olimpijada 2006.)*

   Rješenje. Ključno je znati odabrati pravi modul – kod potencija je dobro odabrati broj n takav da eksponent dijeli $\varphi(n)$. Budući da $5 \mid 10 = \varphi(11)$, gledamo jednadžbu modulo 11.

   Desna strana je $20152015 \equiv 5-1+0-2+5-1+0-2 \equiv 4 \pmod{11}$. S druge strane, po malom Fermatovom teoremu, ako $11 \nmid a$, onda $11 \mid a^{10} - 1 = (a^5 - 1)(a^5 + 1)$, pa je $a^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$, pa je lijeva strana kongruentna nekom od brojeva $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ (tj. $8, 9, 10, 0, 1, 2, 3$). Budući da 4 nije među tim brojevima, ova jednadžba zaista nema rješenja.

2. Dokaži da sustav

$$
\begin{aligned}
x^6 + x^3 + x^3y + y &= 147^{157} \\
x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 &= 157^{147}
\end{aligned}
$$

   nema rješenja u cijelim brojevima. *(USAMO 2005).*

3. Odredi sva rješenja jednadžbe $19x^3 - 84y^2 = 1984$ u cijelim brojevima.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje je $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^2$.

5. Odredi sve prirodne brojeve a, b, c takve da je $2 = abc - a - b - c$.

(DZ) Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje je $\left(\frac{2x^3}{y} + 1\right)^2 = 9 + 4y$.

6. Dokaži da $4mn - m - n$ nije potpuni kvadrat ni za koje prirodne m i n. *(5. s tuluma)*

7. Dokaži da jednadžba $y^2 = x^3 + 7$ nema rješenja u prirodnim brojevima.

8. Riješi jednadžbu $3^x = 2^x y + 1$ u prirodnim brojevima. *(3. s tuluma)*

9. Riješi jednadžbu $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$.

10. Odredi parove prirodnih brojeva (x, y) takvih da $y \mid x^2 + 1$ i $x^2 \mid y^3 + 1$. *(4. s tuluma, Mediteransko 2002.)*

11. Nađi sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da $xy^2 + y + 7$ dijeli $x^2y + x + y$. *(IMO 1998.)*

12. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje $2mn^2 - n^3 + 1$ dijeli m^2. *(IMO 2002)*

13. Nađi sve parove prirodnih brojeva $(x, y), x \neq y$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x(x + y) = y^2 + 1.$$

   (Mala olimpijada 2004.)

14. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da $ab \mid a^2 + b^2 + 1$. Dokaži da je $3ab = a^2 + b^2 + 1$.

Dodatni izvori zadataka i rješenja

- Matija Bašić, *Diofantske jednadžbe koje svaki šonjo zna riješiti, a olimpijcima je korisno znati*, http://web.math.pmf.unizg.hr/ mbasic/materijali.htm
- Amir Hossein Parvardi, *Lifting The Exponent Lemma*, http://www.taharut.org/imo/LTE.pdf
- PEN projekt, https://projectpen.wordpress.com/