Aritmetičke funkcije

Eulerova funkcija

Oznaka: $\phi(n)$

Značenje: Broj prirodnih brojeva koji su manji od n i relativno prosti s n, tj. broj prirodnih brojeva k takvih da $1 \leq k \leq n$, gdje je $M(k,n) = 1$.

Primjer: $\phi(9) = 6$ (to su 1,2,4,5,7 i 8; iz svojstva 3. izravno $\phi(9) = 9(1 - \frac{1}{3}) = 6$)

Svojstva:

1. Multiplikativnost: $M(m,n) = 1 \Rightarrow \phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Općenito, vrijedi:
$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)\frac{M(m,n)}{\phi(M(m,n))}.$$
2. $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, gdje je p prost broj.
3. $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i})$, gdje su p_i prosti djeljitelji od n.
4. **Eulerov teorem**: $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$, gdje je $M(a,n) = 1$. Specijalan slučaj Eulerovog teorema je mali Fermatov teorem, za prost n.
5. $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.
6. $a|b \Rightarrow \phi(a) \mid \phi(b)$.
7. $\phi(n^m) = n^{m-1}\phi(n)$.

Zanimljivosti:

Lehmerova slutnja: ne postoji složen $n \in \mathbb{N}$ takav da $\phi(n) \mid n - 1$.

Carmichaelova slutnja: za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji barem jedan prirodan broj $m \neq n$ takav da je $\phi(m) = \phi(n)$.

Broj djeljitelja

Oznaka: $\tau(n)$ (ponekad $d(n)$)

Značenje: Broj različitih djeljitelja prirodnog broja n.

Primjer: $\tau(420) = 24$ (iz svojstva 1., uz $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$).

Svojstva:

1. $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$, gdje je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ jedinstven rastav prirodnog broja na potencije prostih faktora

2. $\prod\limits_{d|n} = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

3. $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

Zbroj djeljitelja

Oznaka: $\sigma(n)$

Značenje: Zbroj različitih djeljitelja prirodnog broja n (uključujući 1 i n).

Primjer: $\sigma(12) = 28$ ($\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, možemo i izravno iz svojstva 1. izračunati $\sigma(12) = \frac{2^3-1}{2-1}\frac{3^2-1}{3-1} = 28$).

Svojstva:

1. $\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1}-1}{p_1-1}\frac{p_2^{\alpha_2}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k}-1}{p_k-1}$, gdje je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ jedinstven rastav prirodnog broja na potencije prostih faktora.

Najveće i najmanje cijelo

Oznake: $\lfloor x \rfloor$ (najveće cijelo, "pod", "antje"); $\lceil x \rceil$ (najmanje cijelo, "strop")

Značenje:
$\lfloor x \rfloor$ - najveći cijeli broj koji nije veći od x, tj. $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$
$\lceil x \rceil$ - najmanji cijeli broj koji nije manji od x, tj. $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$

Svojstva:

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

2. $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, $\lceil n + x \rceil = n + \lceil x \rceil$, gdje je n cijeli broj.

3. $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \Rightarrow |x - y| < 1$.

4. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

5. $\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor \frac{x}{n} \rfloor, n \in \mathbb{Z}$.

6. $n, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ je broj svih višekratnika $v \in \{1, 2, \ldots, n\}$ broja k.

7. $a = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \ldots$, gdje je a najveći prirodni broj za koji vrijedi $p^a | n!$, p prost, $n \in \mathbb{N}$.

Zadaci

1. Dokažite da vrijedi

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor x+\frac{1}{n}\rfloor + \lfloor x+\frac{2}{n}\rfloor + \cdots + \lfloor x+\frac{n-1}{n}\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

2. Odredite sve prirodne brojeve n takve da $\phi(n) \mid n$.

3. Neka je $\mu(n)$ najveći neparni djeljitelj prirodnog broja n. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\frac{\mu(3)}{3}+\cdots+\frac{\mu(2^n)}{2^n}\right) \geq \frac{2}{3}.$$

4. (*N2 prijedlog za IMO 2000*) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $(\tau(n))^3 = 4n$.

5. Označimo s $\psi(n)$ broj različitih prostih faktora prirodnog broja n. Dokažite da ako za prirodan broj n vrijedi $\phi(n) \mid n-1$ i $\psi(n) \leq 3$, tada je n prost.

6. Označimo s $\mu(n)$ najveći neparni djeljitelj prirodnog broja n. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ kao

$$f(2n-1) = 2^n,\ f(2n) = n + \frac{2n}{\mu(n)},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Odredite sve k takve da je $\underbrace{(f(f(\ldots(f(1)))}_{k \text{ puta}}\ldots) = 2015$.

7. Neka je p prost broj i α pozitivan realan broj takav da $p\alpha^2 < \frac{1}{4}$. Dokažite da je $\lfloor n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n}\rfloor = \lfloor n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n}\rfloor$, za sve prirodne brojeve $n \geq \lfloor \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\sqrt{p}}}\rfloor + 1$.

8. Neka su m i n prirodni brojevi veći od 1 takvi da $M(m, n-1) = M(m, n) = 1$. Dokažite da prvih $m-1$ članova niza $n_1, n_2, \ldots$, gdje je $n_1 = mn+1$ i $n_{k+1} = n \cdot n_k + 1$ za $k \geq 1$ ne mogu biti svi prosti.

Rješenja

1. Zapišimo x kao $x = \lfloor x\rfloor + \{x\}$, pri čemu je $0 \leq \{x\} < 1$. Lijeva strana je sada $\lfloor x\rfloor + \lfloor \lfloor x\rfloor + \{x\} + \frac{1}{n}\rfloor + \lfloor \lfloor x\rfloor + \{x\} + \frac{2}{n}\rfloor + \cdots + \lfloor \lfloor x\rfloor + \{x\} + \frac{n-1}{n}\rfloor$. Neka je k cijeli broj takav da je $\{x\} + \frac{k}{n} < 1$ i $\{x\} + \frac{k+1}{n} \geq 1$, očito je $1 \leq k \leq n-1$, čim je $n \geq 2$. Lijeva strana je sada jednaka $n\lfloor x\rfloor + (n-1-k)$. Desna strana je pak $n\lfloor x\rfloor + \lfloor n\{x\}\rfloor$, no zbog nejednakosti $n-k-1 \leq n\{x\} \leq n-k$ odmah slijedi i $\lfloor n\{x\}\rfloor = n-1-k$, čime dokazujemo zadani identitet.

2. Uvjet $\phi(n) \mid n$ je ekvivalentan s $(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1) \mid p_1p_2\cdots p_k$. Kad bi n imao dva neparna prosta faktora, onda bi barem dva broja (p_i-1) bili parni, pa njihov umnožak ne bi mogao dijeliti $p_1p_2\cdots p_k$ (gdje imamo najviše jednu dvojku). Dakle n može imati kao proste faktore 2 i p, za neki neparan prost broj p, te mora vrijediti da $(2-1)(p-1) = p-1$ dijeli $2p$. No, $p-1$ i p su relativno prosti, pa $p-1$ dijeli 2, što je moguće samo ako je $p = 3$. Zato su rješenja brojevi oblika $n = 2^a3^b$, za $a, b \geq 0$.

3. Da bi $\mu(x)$ bio najveći neparni djeljitelj broja x, mora vrijediti $\mu(x)2^k = x$, tj. broj x mora biti jednak umnošku tog neparnog djeljitelja i najveće potencije broja 2 koja dijeli x. Sada je $\frac{\mu(x)}{x} = \frac{\mu(x)}{2^k \mu(x)} = \frac{1}{2^k}$. Našu sumu možemo stoga zapisati kao

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Preostaje prebrojati koliko se puta koja potencija pojavljuje. $\frac{1}{2^0}$ pojavljuje se $\frac{2^n}{2^1}$ puta (tj.svaki drugi broj je paran), $\frac{1}{2^1}$ pojavljuje se $\frac{2^n}{2^2}$ puta (tj. svaki četvrti broj djeljiv je samo s 2, a ne i s 4,8..) itd. Općenito, za $i \leq n-1$, vrijedi da se $\frac{1}{2^i}$ pojavljuje 2^{n-i-1} puta, dok se $\frac{1}{2^n}$ pojavljuje točno jednom (zadnji član). Suma je sada

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^0}\cdot\frac{2^n}{2}+\frac{1}{2^1}\cdot\frac{2^n}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot 1\right).$$

Faktoriziranjem i korištenjem formule za sumu geometrijskog niza dobivamo da je to jednako $\frac{2}{3}+\frac{4^{-n}}{3}$, čime smo dokazali da zapravo vrijedi stroga nejednakost.

4. Zapišimo $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. S obzirom da $4n$ mora biti potpuni kub, slijedi da je $p_1 = 2, \alpha_1 = 3\beta_1 + 1, \alpha_2 = 3\beta_2, \ldots, \alpha_k = 3\beta_k$. Iz toga i $\tau(n) = \sqrt[3]{4n}$ slijedi

$$(3\beta_1+2)(3\beta_2+1)\cdots(3\beta_k+1) = 2^{\beta 1+1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}.$$

Lijeva strana nije djeljiva s 3, iz čega slijedi $p_i \geq 5$ za $i \geq 2$. Vrijedi

$$\frac{3\beta_1+2}{2^{\beta_1+1}} = \frac{p_2^{\beta_2}}{3\beta_2+1}\frac{p_3^{\beta_3}}{3\beta_3+1}\cdots\frac{p_k^{\beta_k}}{3\beta_k+1}.$$

Zbog $p_i^{\beta_i} \geq 5^{\beta_i} = (1+4)^{\beta_i} \geq 1 + 4\beta_i$ slijedi $\frac{3\beta_1+2}{2^{\beta_1+1}} \geq 1$, iz čega zaključujemo $\beta_i \leq 2$. Za $\beta_1 = 0$ i $\beta_1 = 2$ je $\frac{3\beta_1+2}{2^{\beta_1+1}} = 1 \Rightarrow \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$, pa dobivamo rješenja $n = 2$ i $n = 128$. Ako je $\beta_1 = 1$, onda je $\frac{3\beta_1+2}{2^{\beta_1+1}} = \frac{5}{4}$. Za $p_i > 5$ ili $\beta_i > 1$ imamo $\frac{p_i^{\beta_i}}{3\beta_i+1} \geq \frac{5}{4} \Rightarrow p_2 = 5, k = 2 \Rightarrow n = 2000$, treće rješenje.

5. Za prosti p vrijedi da ako $p^2 \mid n$, onda $p \mid \phi(n)$, ali $p \nmid n-1$, kontradikcija. Stoga moramo jedino pokazati da je $n \neq pq, n \neq pqr$ za proste brojeve $p < q < r$.

   (a) $n = pq$
   Vrijedi $(p-1)(q-1) \mid pq-1$. Za $q \geq 3$ je lijeva strana parna, pa mora biti i desna, iz čega slijedi da su p i q neparni. No, za $p = 3, q = 5$ je $\frac{pq-1}{(p-1)(q-1)} < 2$, te se lijeva strana smanjuje i uvijek je veća od 1 pa ne može biti cijeli broj. Kontradikcija.

   (b) $n = pqr$
   Kao i u prethodnom slučaju su p, q, r svi neparni. Za $p = 3, q = 7$ i $r = 11$ vrijedi $\frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)} < 2$, i opet kako p, q, r rastu lijeva strana se smanjuje i veća je od 1, što eliminira sve slučajeve osim $p = 3, q = 5$. Za $r = 7$ imamo $\frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)} < 3$, pa je jedina dostižna vrijednost u cijelim brojevima jednaka 2. No, $\frac{15r-1}{8(r-1)} = 2$ daje $r = 15$ koji nije prost pa smo ovime eliminirali sve slučajeve.

6. Paran broj možemo zapisati kao $2^a b$, i vrijedi $f(2^a b) = 2^{a-1}b + \frac{2^a b}{b} = 2^{a-1}b + 2^a = 2^{a-1}(b+2)$, pa zaključujemo da se u svakoj iteraciji najveći neparni djeljitelj poveća za 2 i treba a iteracija da bismo dobili neparan broj koji će onda biti $b + 2a$. Ako krenemo od $2n-1$, treba $n+1$ iteracija funkcije f za dobiti $2n+1$, sljedeći neparan broj. Očito se niti jedan neparan broj ne pojavljuje dvaput, te će se svaki neparni broj pojaviti. Indukcijom pokažimo da je $f^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1) = 2n-1$. Korak: $f^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1}(1) = f^{k+1}(f^{\frac{k(k+1)}{2}-1}(1)) = f^{k+1}(2k-1) = 2k+1 = 2(k+1)-1$. Iz toga i $2015 = 2 \cdot 1008 - 1 \Rightarrow k = \frac{1008 \cdot 1009}{2} - 1 = 508535$.

7. Dovoljno je pokazati da nema cijelih brojeva u intervalu $(n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n}, n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n}]$ za $n \geq \lfloor \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\sqrt{p}}} \rfloor + 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji cijeli broj k takav da $n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n} < k \leq n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n} \Rightarrow n^2 p + \frac{\alpha^2}{n^2} - 2\alpha\sqrt{p} < k^2 \leq n^2 p + \frac{\alpha^2}{n^2} + 2\alpha\sqrt{p}$. Primijetimo $\frac{\alpha^2}{n^2} - 2\alpha\sqrt{p} > -1$. Iz $n \geq \lfloor \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\sqrt{p}}} \rfloor + 1$ slijedi $\frac{\alpha^2}{n^2} + 2\alpha\sqrt{p} < 1$ pa je $n^2 p - 1 < k^2 < n^2 p + 1 \Rightarrow k^2 = n^2 p$, tj. $\sqrt{p} = \frac{k}{n}$, što je kontradikcija jer je p prost.

8. $n_k = n^k m + n^{k-1} + \cdots + n + 1 = n^k m + \frac{n^k - 1}{n-1}$ za svaki prirodan broj k. Stoga je $n_{\phi(m)} = n^{\phi(m)} m + \frac{n^{\phi(m)}-1}{n-1}$. Iz Eulerovog teorema slijedi $m \mid n^{\phi(m)} - 1$, i zbog $M(m, n-1) = 1$ imamo $m \mid \frac{n^{\phi(m)}-1}{n-1} \Rightarrow m \mid n_{\phi(m)}$, a zbog $\phi(m) \leq m-1$ i činjenice da $n_{\phi(m)}$ nije prost slijedi tvrdnja zadatka.