Pripreme 2015. za 8. i 1. r. Azra Tafro, 18. 6. 2015.

Matematička indukcija

Uvod

Matematička indukcija je jednostavan, čest i vrlo važan princip kojim se dokazuje da neka tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve (ili sve prirodne brojeve od nekog mjesta nadalje, ili sve prirodne brojeve određenog oblika itd.) Koristimo ju u logičko-kombinatornim zadacima, ali i u algebri, teoriji brojeva, geometriji i općenito svugdje gdje dokazujemo neku tvrdnju za prebrojiv skup. Opći oblik:

Tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$ ako vrijedi tvrdnja $T(n_0)$ te ako iz $T(k)$ slijedi $T(k+1)$ za svaki k za koji je tvrdnja definirana.

Kada se služimo "alatom" indukcije, zadatak rješavamo u tri dijela. Prvi dio je dokazivanje **baze**, tj. dokaz da tvrdnja vrijedi za početni n_0. Zatim slijedi **pretpostavka** da tvrdnja vrijedi za neki $k \geq n_0$, a potom iz pretpostavke izvodimo **korak** indukcije tj. dokazujemo da u tom slučaju vrijedi i za $k+1$.

Indukciju možemo koristiti i u alternativnom obliku, tako da umjesto pretpostavke da vrijedi $T(k)$ koristimo pretpostavku da vrijede svi $T(n_0), \ldots, T(k)$. Uočite da je ta tvrdnja samo na prvi pogled "jača", a zapravo je ekvivalentna općem obliku.

Ako malo modificiramo osnovni princip, možemo dokazivati i slične tvrdnje:

- Ako pokažemo $T(n_0)$ te ako iz $T(k)$ slijedi $T(k+1)$ i $T(k-1)$, tvrdnja vrijedi za sve cijele brojeve.
- Ako pokažemo $T(n_0)$ za neki neparni n_0 te ako iz $T(k)$ slijedi $T(k+2)$, tvrdnja vrijedi za sve neparne brojeve veće ili jednake n_0 (i analogno za parne).
- Ako pokažemo $T(n_0)$ i $T(n_0+1)$ te ako iz $T(k)$ slijedi $T(k+2)$, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve veće ili jednake n_0.
- Ako pokažemo da vrijedi $T(n_0, m_0)$ te ako iz $T(n, m)$ slijede $T(n+1, m)$, $T(n, m+1)$ tvrdnja vrijedi za sve parove prirodnih brojeva (n, m), $n \geq n_0$, $m \geq m_0$.

Primjeri:

1. Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Dokažite da je za sve $n \in \mathbb{N}$ $n^3 + 2n$ djeljivo s 3.
3. Dokažite da za sve $n \geq 4$ vrijedi $n! \geq 2^n$.

4. U ravnini je dano n pravaca tako da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Dokažite da se ti pravci sijeku u ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.

Lakši zadaci za vježbu:

1. Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$
2. Dokažite da je broj $9^{2\cdot 2015}-5\cdot 2015-1$ djeljiv s 25. (Uočite da tvrdnja zapravo vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$!)
3. Dokažite da je $5^{n+2}+7^n$ djeljivo s 12 za sve neparne n.

Zadaci:

1. Dokažite da za svaki n broj 5^n završava s 25.
2. Dokažite da se svaki iznos od $n$kn, $n \geq 4$ može platiti koristeći samo kovanice od 2kn i 5kn.
3. Dokažite da ploču $2^n \times 2^n$ kojoj nedostaje jedan 1×1 kvadratić možemo popločiti trominima za svaki n. (Tromino = pločica koja se sastoji od tri 1×1 kvadratića, složenih u obliku slova L.)
4. Formula vozi po kružnoj stazi. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da formula obiđe stazu. Pokažite da postoji mjesto na stazi s kojeg formula može krenuti da obide cijelu stazu. (Ovo je također indukcija, iako ne piše u tekstu "za svaki n"!)
5. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n-znamenkasti broj s neparnim znamenkama koji je djeljiv s 5^n.

Ponekad indukcija nije očigledna, već početnu tvrdnju treba modificirati. Primjerice:

Dokaži da za sve $n \geq 1$ vrijedi $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n}}$.

Standardni pristup dovest će nas do dokazivanja "pomoćne" tvrdnje $\frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{3n}}{3(n+1)}$ koja ne vrijedi. Međutim, ako početnu tvrdnju zamijenimo jačom tvrdnjom
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$
potonju je lako dokazati standardnim pristupom (provjerite!).

Slično, ponekad zadatak na prvi pogled uopće nije moguće riješiti indukcijom. Primjerice:

Dokaži da za sve $n \geq 2$ *vrijedi* $\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$.

Ovakvu tvrdnju očito ne možemo pokazati direktnim uvrštavanjem pretpostavke. Međutim, dodamo li s desne strane (nepoznati) član $a_n > 0$ dobivamo pomoćnu tvrdnju

$$\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + a_n < \frac{3}{4}$$

iz koje slijedi početna. Uvrštavanjem baze i pretpostavke vidimo da niz (a_n) mora zadovoljavati $a_2 \leq 1/2$ i $a_n - a_{n+1} \geq 1/(n+1)^2$. Uočavamo da niz $a_n = 1/n$ zadovoljava te pretpostavke, a nejednakost

$$\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} < \frac{3}{4}$$

je lako dokazati standardnom tehnikom matematičke indukcije.

Pokušajte sami:

- Dokaži da za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Za one koji žele više... (prilično) teži zadaci (stvarno!):

1. Dokaži da se svaki prirodan broj manji ili jednak $n!$ može prikazati kao suma najviše n različitih djelitelja broja $n!$.

2. Dokaži da za svaki $n > 3$ postoji konveksni poligon s n stranica koje nisu sve jednake takav da je suma udaljenosti bilo koje točke u unutrašnjosti do stranica mnogokuta konstantna. (Uputa: pokaži $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ te provjeri tvrdnju za dva elementa baze, $n = 4$ i $n = 5$.)

3. Na pravokutnom stolu nalazi se nekoliko jednakih papirića kvadratnog oblika, svaki obojan u jednu od n boja, tako da su stranice kvadrata parelelne stranicama stola. Između svakih n kvadrata u različitim bojama moguće je naći dva koja se mogu pribiti za stol jednom pribadačom (tj. koja se preklapaju). Dokaži da postoji boja takva da je moguće pribiti sve papiriće te boje za stol koristeći $2n - 2$ pribadače.

4. Od niza S_1 koji sadrži $n+1$ nenegativnih cijelih brojeva $a_0, \ldots, a_n$ možemo dobiti niz S_2 brojeva $b_0, \ldots, b_n$ takav da je b_i broj brojeva u nizu S_1 koji se nalaze prije a_i i različiti su od a_i (dakle $b_0 = 0$). Na isti način dobivamo niz S_3 od niza S_2 itd. Dokaži da, ako je $a_i \leq i$, vrijedi $S_n = S_{n+1}$.