Kvadratna jednadžba

1. Riješite jednadžbe

   a) $x^2 = 1$
   b) $x^2 = \pi$
   c) $x^2 + 2x + 1 = 0$
   d) $x^2 + 3x + 2 = 0$
   e) $x^2 + 2x - 2 = 0$

   Ovo nam daje ideju za općeniti algoritam...

2. Provjerite imaju li sljedeće jednadžbe realnih rješenja. Ako imaju, odredite ih:

   a) $x^2 + 4x + 5 = 0$
   b) $3x^2 - 5x + 6 = 0$
   c) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

   Ako jednadžbu možemo faktorizirati, onda očito znamo rješenja. Obratno, ako znamo rješenja, možemo je faktorizirati. Odavde dobivamo tzv. Vieteove formule.

   Vratimo se na diskriminantu:

3. Za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ jednadžba

   $$a^2x^2 + (a-3)(\sqrt{a^2+27})x - 3 = 0$$

   ima realna rješenja?

4. Nađite skup realnih rješenja jednadžbe $2x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x - 3y + 9 = 0$

5. Nađite sve parove cijelih brojeva a, b za koje vrijedi $7a+14b = 5a^2+5ab+5b^2$

6. Odredite sve parove $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje vrijedi

   $$x^2y^4 - 16xy^3 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0$$

7. Odredite sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi $m^3 + n^3 = (m+n)^2$.

8. Ako se dvoznamenkastom broju pribroji umnožak njegovih znamenaka, dobije se kvadrat zbroja tih znamenaka. Odredite sve takve brojeve.

   U mnogim situacijama se možemo svesti na kvadratne jednadžbe:

9. Riješite sljedeće jednadžbe:

   a) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
   b) $\frac{4}{(x+1)^2} = 4 - 2x - x^2$

c) $x^2 + \frac{4}{x^2} + 6x + \frac{12}{x} = 23$

d) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$

10. Za koje $a \in \mathbb{R}$ su sva rješenja jedadžbe $x(x-1)(x-2)(x-3) = a$ realni brojevi?

11. Odredite sve parove realnih brojeva x, y koji zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + 5xy - 7y^2 = 0$.

    Vieteove formule nam omogućuju da saznamo informacije o rješenjima bez da ih eksplicitno izračunamo:

12. Bez računanja rješenja x_1, x_2 jednadžbe $2x^2 - 5x + 9 = 0$, odredite $x_1x_2, x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

13. Pretpostavimo da jednadžba $x^2 - x + c = 0$, pri čemu je $c \neq \frac{1}{4}$ ima realna rješenja. Dokažite da je tada točno jedno rješenje veće od $\frac{1}{2}$.

14. Ako su korijeni jednadžbe $x^2 + ax + 1 = b$ cijeli brojevi, dokažite da je $a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$.

15. *(Državno 1994, 2. razred)* Označimo s D diskriminantu, s P produkt, a sa S zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Pokažite da postoji jedinstvena takva jednadžba za koju su a, D, P, S uzastopni cijeli brojevi (u rastućem poretku).

16. Riješite sustav jednadžbi

$$x + y = 5, \quad xy = 4.$$

17. Riješite sustav jednadžbi

$$x^2 + y^2 = 5, \quad xy = 4.$$

18. *(Županijsko 1997, 2. razred)*
    Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$, gdje je $p + q = 1996$, su cijeli brojevi. Nađite ta rješenja.