IMO pripreme 2015. Grgur Valentić, 6. 6. 2015.

Projektivna geometrija

Uvod

Teorem 1 (Cevin teorem)**.** *Dan je trokut ABC, te točke D, E, F na pravcima BC, CA i AB. Ako su AD, BE i CF kopunktalni, tada je* $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$.

Teorem 2 (Menelajev teorem)**.** *Dan je trokut ABC, te točke D, E, F na pravcima BC, CA i AB. Ako su D, E i F kolinearne, tada je* $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$.

Teorem 3 (Obrat Cevinog teorema)**.** *Dan je trokut ABC, te točke D, E, F na pravcima BC, CA i AB. Ako je $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$, tada su AD, BE i CF kopunktalni ili paralelni.*

Teorem 4 (Obrat Menelajevog teorema)**.** *Dan je trokut ABC, te točke D, E, F na pravcima BC, CA i AB. Ako je $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$, tada su D, E i F kolinearne.*

Primjetite da, iako su ovi teoremi često citirani upravo ovako, ovo nije potpuno točno. Naime, ova 4 teorema bi implicirala ekvivalenciju kolinearnosti D, E i F sa kopunktalnošću AD, BE i CF, što naravno ne mora biti slučaj. Suptilna greška načinjena je u iskazu obrata ova dva teorema.

Ispravno bi bilo u obratu Cevinog teorema dodati "te se neparan broj točaka D, E, F nalazi unutar odgovarajućih stranica", a u obratu Menelajevog teorema dodati da se paran broj navedenih točaka nalazi unutar odgovarajućih stranica.

Drugi način na koji ovo možemo popraviti je da umjesto omjera $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$, gledamo usmjerene vrijednosti dužina, pa u Cevinom teoremu i njegovom obratu zamijenimo tu jednakost sa $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1$, a u Menelajevom i njegovom obratu sa $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = -1$.

Postoje razne ekvivalentne definicije afinih preslikavanja, ovjde je navedena jedna koja možda daje najbolji osjećaj što je to afino preslikavanje. Ostale ekvivalente definicije i neke posljedice bit će navedene kasnije.

Definicija 1 (Afina transformacija)**.** *Svako preslikavanje ravnine koje je kompozicija konačno mnogo translacija, rotacija, homotetija, centralnih i osnih simetrija te dilatacija naziva se afina transformacija ravnine.*

Dilatacija je preslikavanje koje za zadani pravac p i $k \neq 0$ svaku točku T preslikava u točku T' za koju je $\overrightarrow{TN} = k \cdot \overrightarrow{T'N}$, pri čemu smo s N označili nožište visine sa T na p.

Primjetite da smo u definiciji mogli izbaciti npr. centralnu simetriju jer je ona poseban oblik homotetije, te osnu simetriju jer je ona poseban oblik dilatacije, oboje za odgovarajući centar simetrije i $k = -1$.

Činjenica 1. *Afina transformacija ravnine je bijekcija ravnine u samu sebe. Slika pravaca su pravci.*

Činjenica 2. *Afina transformacija čuva kolinearnost točaka, paralelnost pravaca i kopunktalnost pravaca.*

Činjenica 3. *Afina transformacija čuva omjere duljina paralelnih dužina, pa posebno, čuva omjer u kojemu točka dijeli dužinu na kojoj se nalazi. Također, afina transformacija čuva omjere površina.*

Činjenica 4. *Bilo koja trojka nekolinearnih točaka može se preslikati u bilo koju drugu trojku nekolinearnih točaka pomoću jedinstvene afine transformacije.*

Prve tri činjenice se lako provjere ako rastavimo afinu transformaciju na kompozicije elementarnih transformacija, te ih dokažemo za svaku transformaciju posebno.

Činjenica 4 je prilično korisna jer nam ona zapravo dopušta da razmišljamo o afinoj transformaciji kao jednom složenom objektu, a ne da ju rastavljamo na "njene sastavne dijelove". U zadacima obično odaberemo neke tri točke te ih "pošaljemo po nekoj afinoj transformaciji" u neke druge tri točke koje nam odgovaraju - često u jednakostraničan trokut, te u toj novoj ravnini dokažemo traženu tvrdnju. Naravno, ovo ima smisla raditi samo onda kada tvrdnja uključuje samo svojstva koja ostaju očuvana prilikom afinog preslikavanja.

Definicija 2 (Dvoomjer)**.** *Dvoomjer četvorke kolinearnih točaka* (A, B, C, D) *definira se kao* $(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Definicija 3 (Harmonik)**.** *Četvorka kolinearnih točaka* (A, B, C, D) *naziva se harmonik ako je* $(ABCD) = -1$.

Definicija 4 (Projektivna transformacija)**.** *Neka su* α *i* β *dvije ravnine u prostoru, točka* O *koja ne leži ni na jednoj od njih, te* l *pravac koji siječe obje ravnine. Centralna projekcija* α *na* β *s centrom u* O *preslikava* A *iz* α *u* B *iz* β *tako da su* A, O *i* B *kolinearne. Paralelna projekcija iz* α *na* β *u smjeru* l *preslikava* A *iz* α *u* B *iz* β *tako da su* AB *i* l *paralelni. Projektivna transformacija je svaka kompozicija konačnog broja cetralnih i paralelnih projekcija.*

Primjetite da centralna projekcija nije bijekcija između dviju ravnina. Na ravnini u kodomeni postoji točno jedan pravac koji se ne pogađa, a na domeni postoji točno jedan pravac za kojeg preslikavanje nije dobro definirano. Stoga, ova formulacija nije zadovoljavajuća, ali uz malu modifikaciju moći ćemo ju popraviti.

Svakoj ravnini pridružimo pravac u beskonačnosti i onda taj par ravnina-pravac promatramo kao jedan "objekt". Na tom objektu ne možemo definirati sve stvari kao u "normalnoj" ravnini, kao kuteve, pa čak ni udaljenost točaka ne možemo definirati na prirodan način. Ipak, možemo definirati pravce i njihova sjecišta. Svaka dva pravca se sijeku točno jednom. Paralelni pravci se sijeku u istoj točki na pravcu u beskonačnosti i tu točku zovemo točkom u beskonačnosti svakog od tih dvaju pravaca.

Ovo možda izgleda kao pomalo neobičan koncept, no on se da matematički potpuno formalizirati. Ipak, cilj ovog predavanja nije to, već sticanje osjećaja o čemu se ovjde radi. Naime, ovo nije nikakvo "varanje" ili dodavanje "nepostojećih objekata", ili nešto slično. Zbunjujuće je donekle što u tom novom objektu opet pravce zovemo pravcima, no valja napomenuti kako pravac u beskonačnosti u tom objektu nije ništa posebniji od drugih pravaca.

Još je jedan bitan koncept možemo definirati čak i za ovaj objekt, a to je dvoomjer točaka. Za kolinearne točke na pravcu koji nije u beskonačnosti se definira na prirodan način. Ako su sve 4 točke u konačnosti, definicija se podudara s uobičajenom. Ako je jedna točka u beskonačnosti, definiramo $(ABC\infty) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$. Primjetite da se definicija prirodno proširuje sa one klasične. Konačno, iako nam ovo neće trebati, ako su sve 4 točke na pravcu u beskonačnosti, pogledajmo 4 paralelna pravca kojima pripadaju te 4 točke te ih presijecimo s nekim drugim pravcem koji je okomit na njih. Jasno je sada kako ćemo definirati dvoomjer. I opet, bitna napomena, koristimo riječi paralelni i okomiti, koji nemaju smisla za taj objekt ravnina-pravac. Ipak, jasno je što se ovjde želi reći - jednom kad odredimo ta 4 pravca kojima pripadaju određene 4 točke u beskonačnosti, ima ih smisla gledati kao pripadnike "prave ravnine", i zato ima smisla reći da su oni paralelni. Inače koncept paralelnosti nije dobar za taj naj objekt, budući da ne želimo izdvajati pravac u beskonačnosti od ostalih - a on ne bi mogao biti paralelan niti sa jednim drugim pravcem.

Da rezimiramo, uveli smo novi objekt ravnina-pravac te na njemu definirali pravce, točke, sjecište pravaca, kolinearnost točaka te dvoomjer. Projektivna transformacija je dakle proizvoljna kompozicija centralnih i paralelnih projekcija na tom objektu, kojeg ćemo u buduće opet često zvati samo "ravnina", no uvijek imajte na umu što se u pozadini zapravo zbiva.

Primjetimo još usput da paralelna projekcija šalje pravac u beskonačnosti polazne ravnine u pravac u beskonačnosti odredišne ravnine, dakle ona je i bijekcija "pravih ravnina". Dodatno, onaj pravac koji projektivna transformacija šalje u pravac u beskonačnosti nazivamo "singularni pravac".

Činjenica 5. *Projektivna transformacija preslikava pravce u pravce, te čuva kolinearnost točaka i kopunktalnost pravaca.*

Činjenica 6. *Projektivna transformacija čuva dvoomjere.*

Činjenica 7. *Bilo koja četvorka nekolinearnih točaka može se preslikati u bilo koju drugu četvorku nekolinearnih točaka pomoću jedinstvene projektivne transformacije.*

Prva činjenica je jednostavna, a druge dvije se malo teže provjere. Zadnja nam je prilično korisna u rješavanju zadataka, slično kao odgovarajuća činjenica za afine transformacije.

Napomenimo još za kraj jednu isplativu tehniku u slučaju korištenja ove metode. Često se isplati kao singularan pravac uzeti onaj koji siječe puno drugih pravaca. Tada će u slici svi ti pravci biti paralelni, budući da se sijeku s pravcem u beskonačnosti. Nakon toga možemo razmisliti o primjenjivanju još neke npr. afine transformacije koja je također projektivna transformacija, ali takva da pravac u beskonačnosti preslikava u pravac u beskonačnosti. Probajte se sami u ovo uvjeriti.

Zadaci

1. Zadan je trokut ABC i točka M unutar njega. Označimo li redom A_1 sjecište pravaca AM i BC, B_1 sjecište pravaca BM i CA, C_1 sjecište pravaca CM i AB, dokažite da je $\frac{|MA|}{|MA_1|} = \frac{|C_1A|}{|C_1B|} + \frac{|B_1A|}{|B_1C|}$.

2. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$ dane su redom točke K, L i M koje dijele pripadne stranice u istom omjeru. Neka su b, c, d pravci koji prolaze točkama B, C, D paralelni pravcima KL, KM, ML, redom. Dokažite da pravci b, c, d prolaze istom točkom.

3. Dan je konveksni četverokut $ABCD$. Neka su P i Q sjecišta pravaca AB i CD te AD i BC, redom. Neka je R proizvoljna točka unutar četverokuta, a K, L, M redom sjecišta BC i PR, AB i QR, AK i DR. Dokažite da su točke L, M, C kolinearne.

4. Neka je $(ABCD)$ harmonik takav da je poredak točaka na pravcu upravo A, B, C, D. Ako je M polovište od $\overline{AB}$ dokažite da je $|AM|^2 = |MC||MD|$.

5. U konveksnom četverokutu $ABCD$ dana je točka O. U unutrašnjosti stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ dane su redom točke K, L, M i N. Ako su $OKBL$ i $OMDN$ paralelogrami, dokažite da je $\sqrt{P(ABCD)} \geq \sqrt{P(ONAK)} + \sqrt{P(OLCM)}$.

6. Kroz svaki vrh trokuta povučena su po dva pravca koji nasuprotne stranice trokuta dijele u tri jednaka dijela. Dokažite da se dijagonale koje prolaze nasuprotnim vrhovima šesterokuta formiranog ovim pravcima sijeku u jednoj točki.

7. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$. Označimo redom K sjecište pravaca DA i CB, L sjecište pravaca AB i CD, G sjecište pravaca AC i KL, F sjecište pravaca DB i KL. Dokažite da je $\frac{|KF|}{|FL|} = \frac{|KG|}{|GL|}$.

8. U četverokutu $ABCD$ pravci AD i BC sijeku se u E, a pravci AB i CD u F. Dokažite da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ i $\overline{EF}$ kolinearna.

9. Neka je M proizovljna točka na dijagonali $\overline{BD}$ paralelograma $ABCD$. Neka AM siječe CD i BC u K i N redom. Neka se kružnica oko M radijusa $|MA|$ i opisana kružnica trokutu KCN sijeku u P i Q. Dokažite da su MP i MQ tangente na drugu kružnicu.

10. Neka su D, E, F dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa BC, CA, AB redom. Neka je točka X unutar trokuta ABC, takva da kružnica upisana trokutu XBC dira XB, XC i BC redom u točkama Y, Z i D. Dokažite da je $EFZY$ tetivan.

11. Neka je O sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$. Neka je E sjecište pravaca AB i CD, a F sjecište pravaca BC i AD. Pravac EO siječe AD i BC redom u K i L, a FO siječe AB i CD u M i N. Dokažite da su $(ABME)$, $(KLOE)$, $(DCNE)$, $(BCLF)$, $(MNOF)$ i $(ADKF)$ harmonici.

12. Dan je trokut ABC. Neka su M i N točke na pravcu BC. Dokažite da su AM i AN unutrašnja i vanjska simetrala kuta α ako i samo ako je $\angle MAN = 90°$ i $(BCMN)$ harmonik.

13. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut za kojeh je $|AB| = |AD|$. Neka je M sjecište pravaca AC i BD. Označimo s N centralnosimetričnu točku točki M s obzirom na točku D. Neka je E drugo sjecište kružnice opisane trokutu ABC i pravca AN, te neka je P točka unutar duljine $\overline{MN}$ takva da je $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|BM|}{|BN|}$. Dokažite da P leži na pravcu CE.

14. Je li moguće obojati u ravnini nekih 2048 točaka crveno i nekih 2048 točaka plavo tako da su obojane točke različite, ne leže sve na istom pravcu i zadovoljavaju uvjet da svaki pravac koji prolazi dvjema točkama različite boje nužno prolazi još jednom obojanom točkom?

Hintovi i izvori

1. (nepoznat izvor) Samo Menelaj.

2. (TP) U što možete poslati paralelogram po afinoj transformaciji?

3. (TP) Primjenite projektivnu transformaciju sa singularnim pravcem PQ.

4. (AR) Čisto raspisivanje.

5. (TP) Ideja je da afinom transformacijom možemo konveksan četverokut poslati u tetivni. Probajte se u to uvjeriti. Dalje je samo naporan račun.

6. (TP) Ovo je očito ako ste dobro razumjeli definicije.

7. (nepoznat izvor) Ceva, Menelaj.

8. (TP) Nekad se isplati iskoristiti afinu transformaciju kako bi nam kasniji račun kompleksnim ili analitičkim metodama bio jednostavniji.

9. (AR) Razmislite kako biste definirali harmonički tetivni četverokut i što za njega vrijedi.

10. (nepoznat izvor) Zadatak ima dosta zanimljivih rješenja. Sjetite se teorema u radikalnim osima, te Ceve i/ili Menelaja. Pokušajte i riješiti korištenjem harmonika, a ako postoji i interesantno rješenje koje koristi inverziju.

11. (TP) Pokušajte prvo riješiti koristeći samo Menelajev teorem. Zatim pokušajte riješiti projektivnom transformacijom.

12. (TP) Angle chase i malo trigonometrije.

13. (nepoznat izvor) Sjetite se kako drukčije interpretirati traženi dokaz. Ostaje malo raspisivanja i angle chasea.

14. (TP) Ne, nažalost 2048 u ovom slučaju nije ništa posebniji od bilo kojeg parnog broja. Da, zadatak ima veze s projektivnim transformacijama.

Literatura

- (TP) Tomislav Pejković - Afine i projektivne transformacije
- (AR) Alexander Remorov - Projective geometry,
  http://www.mit.edu/ alexrem/ProjectiveGeometry.pdf