IMO pripreme 2015. Matija Bašić, 16. 6. 2015.

Lijepi zadaci s groznim slikama

Nekoliko geometrijskih ideja

Na ovom predavanju ćemo rješavati teže geometrijske zadatke olimpijskog tipa. Trikovi koje ćemo iskoristiti:

- Dvije kružnice se diraju - homotetija koja prevodi jednu u drugu ili kut tetive i tangente
- Kolinearnost - uočimo još jednu točku koja je na tom pravcu
- Nacrtajte sliku šestarom i ravnalom i uočite kolinearnost ili koncikličnost nekih točaka
- Uočiti da je neka točka radikalno središte, iskoristiti to za kolinearnost (te točke i dvije na radikalnoj osi)
- Nadograditi do pravokutnog trokuta, iskoristiti da je polovište hipotenuze središte opisane kružnice
- Okomiti pravci - radikalna os okomita na spojnicu polovišta, kutovi s okomitim kracima
- Promijeni definiciju točke - ako treba dokazati da sjecište od p i q leži na k, dokaži da sjecište od p i k leži na q
- Nacrtajte samo dio slike, proučite što možete izvući iz jednog uvjeta

  ('linearno' zadani zadaci se mogu rješavati uvjet po uvjet, 'nelinearno' zadani zadaci trebaju neku ideju poput ortocentra ili neke druge karakteristične točke)
- Uočite simetrije (centralnu simetriju ako imate polovište, simetriju obzirom na simetralu kuta)
- Polovište se može iskoristiti kao sjecište dijagonala paralelograma
- Ako je neka duljina neke dužine zbroj druge dvije, produžite neke polupravce i docrtajte točke tako da dobijete jednakokračan trokut
- Simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice se sijeku na opisanoj kružnici
- Simetrale vanjskog i unutarnjeg kuta su okomite

Zadaci

1. (Revista Math. Timisoara, 1986) Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i neka se pravci AB i CD sijeku u točki E. Točka F je centralno simetrična slika točke C obzirom na točku E. Dokaži da su pravci AF i BD okomiti ako i samo ako su pravci AB i CD okomiti.

2. (Rumunjska 60') Neka su C i D različite točke na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$. Označimo s E, F i G polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DB}$, redom. Okomica iz E na AF siječe tangentu na polukružnicu kroz točku A u točki M, a okomica iz G na BF siječe tangentu na polukružnicu kroz točku B u točki N. Dokaži da su pravci MN i CD paralelni.

3. (IMO 2000) Neka su AH_1, BH_2 i CH_3 visine u šiljastokutnom trokutu ABC. Upisana kružnica dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama T_1, T_2 i T_3, redom. Promotrimo zrcalne slike pravcima H_1H_2, H_2H_3 i H_1H_3 obzirom na pravce T_1T_2, T_2T_3 i T_1T_3. Dokaži da te slike određuju trokut čiji vrhovi leže na upisanoj kružnici trokutu ABC.

4. (SL 2000) Neka je $ABCD$ konveksan četverokut, pri čemu AB i CD nisu paralelni. Neka je točka X u unutrašnjosti $ABCD$ takva da je $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX < 90°$ i $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX < 90°$. Ako je točka Y presjek simetrala dužina AB i CD, dokaži da je $\sphericalangle AYB = 2\sphericalangle ADX$.

5. Neka su točke M i N unutar trokuta ABC takve da je
$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle NAC \quad \text{i} \quad \sphericalangle MBA = \sphericalangle NBC.$$
Dokaži
$$\frac{|AM||AN|}{|AB||AC|} + \frac{|BM||BN|}{|BA||BC|} + \frac{|CM||CN|}{|CA||CB|} = 1$$

6. (SL 2004) Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Pravci AD i BC se sijeku u točki E, pri čemu je C između B i E. Dijagonale AC i BD se sijeku u točki F. Neka je M polovište stranice $\overline{CD}$, te neka je $N \neq M$ točka na opisanoj kružnici trokuta ABM takva da je
$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AM|}{|BM|}.$$
Dokaži da su točke E, F i N kolinearne.

7. (SL 2010) Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut takav da je $BC||AE$, $|AB| = |BC| + |AE|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE$. Neka je M polovište dužine $\overline{CD}$ i neka je O središte opisane kružnice trokutu BCD. Ako je $\sphericalangle DMO = 90°$, dokaži da je $2\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDE$.

8. (SL 2002) Neka je Ω upisana kružnica šiljastokutnom trokutu ABC i neka pravac BC dira tu kružnicu u točki K. Neka je AD visina u trokutu ABC i neka je M polovište dužine $\overline{AD}$. Ako je N drugo sjecište kružnice Ω i pravca KM, dokaži da se Ω i kružnica opisana trokutu BCN diraju u N.

9. (SL 2014) Neka su Ω i O opisana kružnica i središte opisane kružnice šiljastokutnom trokutu ABC uz $|AB| > |BC|$. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe Ω u točki $M \neq B$. Neka je Γ kružnica s promjerom $\overline{BM}$. Simetrale kutova $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ sijeku Γ u točkama P i Q, redom. Točka R je odabrana na pravcu PQ tako da je $|BR| = |MR|$. Dokaži da je $BR || AC$.

   (Ovdje se pretpostavlja da je simetrala kuta polupravac.)

10. (SL 2014) Neka je ABC trokut s opisanom kružnicom Ω i središtem upisane kružnice I. Neka pravac koji prolazi kroz točku I i okomit je na CI siječe dužinu $\overline{BC}$ i luk BC (koji ne sadrži A) kružnice Ω u točkama U i V, redom. Neka pravac koji prolazi kroz U i paralelan je pravcu AI siječe pravac AV u točki X i neka pravac koji prolazi kroz V i paralelan je s AI siječe pravac AB u točki Y. Neka su W i Z polovišta dužina $\overline{AX}$ i $\overline{BC}$, redom.

    Dokaži da ako su točke I, X i Y kolinearne, onda su i točke I, W i Z kolinearne.

11. (SL 2011) Neka je Ω opisana kružnica šiljastokutnom trokutu ABC. Neka je B_0 polovište dužine $\overline{AC}$ i neka je C_0 polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je D nožište visine iz A, te neka je G težište trokuta ABC. Neka je k kružnica koja prolazi kroz B_0 i C_0 i koja dira Ω u točki $X \neq A$. Dokaži da su točke D, G i X kolinearne.

12. (IMO 2011) Neka je Γ opisana kružnica trokutu ABC. Neka je p tangenta na Γ i neka su p_a, p_b i p_c pravci dobiveni zrcaljenjem pravca p preko pravaca BC, CA i AB, redom. Dokaži da opisana kružnica trokua određenog pravcima p_a, p_b i p_c dira kružnicu Γ.