Geometrijske nejednakosti

Zadatak 1. (Indija, 2001.) Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Dužine $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ sijeku upisanu kružnicu redom u točkama D, E, F. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \leq 3\left(|AD| + |BE| + |CF|\right).$$

Zadatak 2. (Moldavija, 2007.) Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$|AI| + |BI| + |CI| \leq 3R.$$

Zadatak 3. (Tajvan, 1998.) Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Pravci AI, BI i CI sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Neka su X, Y i Z proizvoljne točke na dužinama $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ i $\overline{DE}$ redom. Dokaži nejednakost

$$d(X, AB) + d(Y, BC) + d(Z, CA) \leq |XY| + |YZ| + |ZX|,$$

pri čemu je $d(X, l)$ udaljenost točke X od pravca l.

Zadatak 4. (Vijetnam, 1991.) Neka je T težište trokuta ABC. Pravci AT, BT i CT sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama D, E i F, različitim od točaka A, B i C. Dokaži sljedeće nejednakosti:

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{|TD|} + \frac{1}{|TE|} + \frac{1}{|TF|} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Zadatak 5. (Mongolija, 1999.) Neka je T težište trokuta ABC. Pretpostavimo da kružnica opisana trokutu ATC dodiruje pravac AB. Dokaži nejednakost

$$\sin \sphericalangle CAT + \sin \sphericalangle CBT \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Zadatak 6. (Rusija, 2002.) Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom su odabrane točke M i N takve da je $2\sphericalangle NOM = \sphericalangle AOC$. Dokaži da opseg trokuta BNM nije manji od duljine stranice $\overline{AC}$.

Zadatak 7. (MMO, 1988.) Zadan je pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je D nožište visine na hipotenuzu $\overline{AB}$. Pravac koji prolazi središtima kružnica upisanih u trokute ADC i DBC siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama K i L. Dokažite da je $P(ABC) \geq 2P(CKL)$, pri čemu P označava površinu odgovarajućeg trokuta.

Zadatak 8. (BMO, 1992.) Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom su dane točke D, E i F takve da je četverokut $AFDE$ tetivni. Dokaži nejednakost

$$\frac{4P(DEF)}{P(ABC)} \leq \left(\frac{|EF|}{|AD|}\right)^2,$$

pri čemu P označava površinu odgovarajućeg trokuta.

Zadatak 9. (Ibersko-američka matematička olimpijada, 2008.) Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta ABC redom su dane točke X, Y, Z. Nadalje, neka su A_1, B_1, C_1 redom središta kružnica opisanih trokutima AXZ, BYX, CZY. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$P(ABC) \leq 4P(A_1B_1C_1),$$

te da jednakost vrijedi ako i samo ako pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze istom točkom. Pri tome P označava površinu odgovarajućeg trokuta.

Zadatak 10. (Turska, 2003.) Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ redom su dane točke K, L, M, N. Dokaži nejednakost

$$\sqrt[3]{P(AKN)} + \sqrt[3]{P(BLK)} + \sqrt[3]{P(CML)} + \sqrt[3]{P(DNM)} \leq 2\sqrt[3]{P(ABCD)},$$

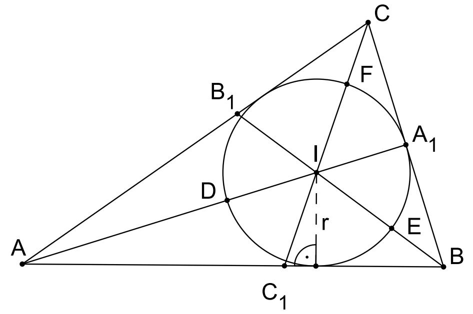
pri čemu P označava površinu odgovarajućeg lika.

Rješenja

Zadatak 1. (Indija, 2001.) Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Dužine $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ sijeku upisanu kružnicu redom u točkama D, E, F. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \leq 3\left(|AD| + |BE| + |CF|\right).$$

Rješenje: Izrazimo ponajprije duljine $|AD|$, $|BE|$, $|CF|$ pomoću duljina simetrala kutova. Neka simetrale unutarnjih kutova sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom u točkama A_1, B_1, C_1.



Zbog poučka o simetrali kuta u trokutu vrijedi $|CA_1| = \dfrac{ba}{b+c}$. Primijenimo li još jedanput spomenuti poučak na trokut AA_1C dobivamo da je $\dfrac{|AI|}{|IA_1|} = \dfrac{b+c}{a}$.

Zbog toga je

$$\frac{|AI|}{s_\alpha} = \frac{1}{\frac{s_\alpha}{|AI|}} = \frac{1}{1+\frac{|IA_1|}{|AI|}} = \frac{1}{1+\frac{a}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{2s-a}{2s},$$

odakle je

$$|AI| = \frac{2s-a}{2s} s_\alpha. \tag{1}$$

S druge strane, $|AI| = |AD| + r$, pa zbog (1) vrijedi jednakost

$$|AD| = \frac{2s-a}{2s} s_\alpha - r. \tag{2}$$

Analogne relacije vrijede i za duljine $|BE|$ i $|CF|$, pa je zadana nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$\sum s_\alpha \leq \sum \frac{6s-3a}{2s} s_\alpha - 9r,$$

odnosno, nakon sređivanja

$$\sum \frac{4s-3a}{2s} s_\alpha \geq 9r. \tag{3}$$

Dokažimo nejednakost (3)! Kako je duljina simetrale veća ili jednaka duljini odgovarajuće visine, lagano dobivamo:

$$\begin{aligned}\sum \frac{4s-3a}{2s} s_\alpha &\geq \sum \frac{4s-3a}{2s} h_a = \sum \frac{4s-3a}{2s} \cdot \frac{2P}{a} \\ &= \frac{P}{s} \sum \frac{4s-3a}{a} = r\left[4s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 9\right].\end{aligned} \tag{4}$$

No, zbog odnosa između aritmetičke i harmonijske sredine, slijedi nejednakost

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{2s}, \tag{5}$$

pa uvrštavanjem u (4) dobivamo nejednakost

$$\sum \frac{4s-3a}{2s} s_\alpha \geq r\left(4s \cdot \frac{9}{2s} - 9\right) = 9r,$$

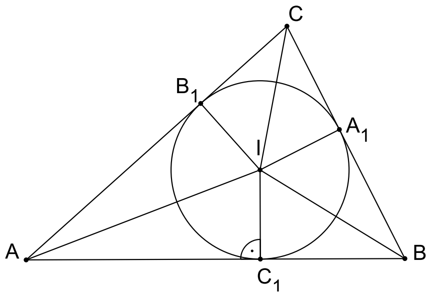
što smo i trebali dokazati.

U nejednakostima (4) i (5) vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $a = b = c$. Zbog toga, znak jednakosti u zadanoj nejednakosti vrijedi samo u slučaju jednakostraničnog trokuta.

Zadatak 2. (Moldavija, 2007.) Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$|AI| + |BI| + |CI| \leq 3R.$$

Rješenje: Neka su A_1, B_1 i C_1 točke u kojima upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom.



Iz pravokutnog trokuta AC_1I slijedi da je $r = |AI| \sin \frac{\alpha}{2}$. Sada, kako je

$$r = \frac{P}{s} \qquad \text{i} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

slijedi da je

$$|AI| = \frac{\sqrt{bc(s-a)}}{\sqrt{s}}. \tag{6}$$

Uvedimo supstitucije $x = s-a$, $y = s-b$ i $z = s-c$. Zbog nejednakosti trokuta zaključujemo da su brojevi x, y i z pozitivni. Sada, kako je $s = x+y+z$, relacija (6) poprima sljedeći oblik:

$$|AI| = \frac{\sqrt{x(x+y)(x+z)}}{\sqrt{x+y+z}}. \tag{7}$$

Analogne formule vrijede i za duljine dužina $\overline{BI}$ i $\overline{CI}$.

Nadalje, uzimajući u obzir navedene supstitucije, za polumjer opisane kružnice vrijedi jednakost

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}.$$

Prema tome, zadana nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$\sum \frac{\sqrt{x(x+y)(x+z)}}{\sqrt{x+y+z}} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}},$$

koja, nakon oslobađanja nazivnika, poprima oblik

$$\sum x\sqrt{yz(x+y)(x+z)} \leq \frac{3}{4}(x+y)(y+z)(z+x). \tag{8}$$

Uočimo kako zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\sqrt{yz(x+y)(x+z)} &= \sqrt{(yx+yz)(zx+zy)} \leq \frac{xy+2yz+zx}{2} \\
\sqrt{zx(y+x)(y+z)} &= \sqrt{(xy+xz)(zx+zy)} \leq \frac{xy+yz+2zx}{2} \\
\sqrt{xy(z+x)(z+y)} &= \sqrt{(xy+xz)(yx+yz)} \leq \frac{2xy+yz+zx}{2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$\sum x(xy+2yz+zx) \leq \frac{3}{2}(x+y)(y+z)(z+x). \tag{10}$$

Ukoliko dokažemo nejednakost (10) onda zbog (9) vrijedi nejednakost (8), a time i tražena nejednakost. Uočimo kako oslobađanjem nazivnika i množenjem faktora na desnoj strani, nejednakost (10) poprima oblik

$$2\sum(x^2y+xy^2)+12xyz \leq 3\sum(x^2y+xy^2)+6xyz,$$

odnosno

$$6xyz \leq \sum(x^2y+xy^2). \tag{11}$$

No, uočimo kako zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi

$$\sum(x^2y+xy^2) \geq 6\sqrt[6]{x^2yxy^2y^2zyz^2z^2xzx^2} = 6xyz$$

Dakle, redom vrijede jednakosti (11), (10) i (8) čime je dokaz gotov.

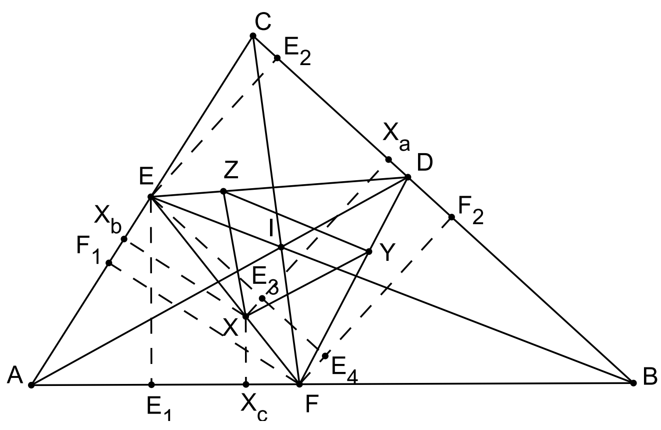
Jednakost vrijedi ako i samo ako je ispunjena u svim nejednakostima koje smo koristili prilikom dokaza. Posebno, mora vrijediti jednakost u (11). To je moguće ako i samo ako je $x^2y = xy^2 = y^2z = yz^2 = z^2x = zx^2$, to jest ako je $x = y = z$, odnosno $a = b = c$. Lagano provjeravamo da u tom slučaju doista vrijedi jednakost u traženoj nejednakosti.

Zadatak 3. (Tajvan, 1998.) Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Pravci AI, BI i CI sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Neka su X, Y i Z proizvoljne točke na dužinama $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ i $\overline{DE}$ redom. Dokaži nejednakost

$$d(X,AB)+d(Y,BC)+d(Z,CA) \leq |XY|+|YZ|+|ZX|,$$

pri čemu je $d(X,l)$ udaljenost točke X od pravca l.

Rješenje: Neka su X_a, X_b i X_c projekcije točke X, redom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Neka su E_1 i E_2 redom projekcije točke E na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, te F_1 i F_2 projekcije točke F na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.



Zbog svojstva simetrale kuta vrijedi

$$|EE_1| = |EE_2| \qquad \text{i} \qquad |FF_1| = |FF_2|. \tag{12}$$

Zbog sličnosti trokutova XX_cF i EE_1F, te zbog svojstva (12) vrijedi:

$$d(X, AB) = \frac{|XF|}{|EF|} \cdot |EE_2|. \tag{13}$$

Analogno, iz sličnosti trokuta X_bXE i F_1FE i svojstva (12) dobivamo

$$d(X, AC) = \frac{|EX|}{|EF|} \cdot |FF_2|. \tag{14}$$

Promotrimo sada pravokutni trapez FF_2E_2E u kojemu je istaknuta dužina XX_a. Neka su E_3 i E_4 projekcije točke E redom na dužine $\overline{XX_a}$ i $\overline{FF_2}$. Kako je $|FE_4| = |FF_2| - |EE_2|$, iz sličnosti trokutova XE_3E i FE_4E dobivamo

$$|XE_3| = \frac{|EX|}{|EF|} \cdot (|FF_2| - |EE_2|) .$$

Zbog toga je

$$d(X, BC) = |XX_a| = |XE_3| + |EE_2| = \frac{|EX|}{|EF|} \cdot |FF_2| + \frac{|XF|}{|EF|} \cdot |EE_2|. \tag{15}$$

Uspoređivanjem relacija (13), (14) i (15) dobivamo

$$d(X, BC) = d(X, AB) + d(X, CA), \tag{16}$$

te analogno još dvije relacije:

$$\begin{aligned} d(Y, CA) &= d(Y, AB) + d(Y, BC) && (17) \\ d(Z, AB) &= d(Z, BC) + d(Z, CA). && (18) \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih triju relacija i transformiranjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} d(X, AB) + d(Y, BC) + d(Z, CA) &= [d(Y, CA) - d(X, CA)] + [d(Z, AB) - d(Y, AB)] \\ &\quad + [d(X, BC) - d(Z, BC)] . && (19) \end{aligned}$$

No očito vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned} d(Y, CA) - d(X, CA) &\leq |XY| \\ d(Z, AB) - d(Y, AB) &\leq |YZ| \\ d(X, BC) - d(Z, BC) &\leq |ZX|, && (20) \end{aligned}$$

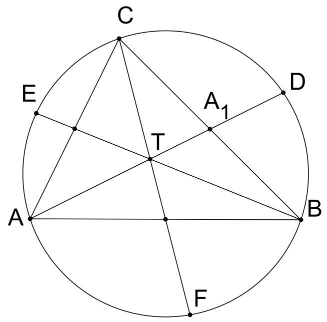
jer na lijevim stranama nejednakosti imamo redom duljine projekcija dužina $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ i $\overline{ZX}$. Konačno, iz (19) i (20) dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 4. (Vijetnam, 1991.) Neka je T težište trokuta ABC. Pravci AT, BT i CT sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama D, E i F, različitim od točaka A, B i C. Dokaži sljedeće nejednakosti:

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{|TD|} + \frac{1}{|TE|} + \frac{1}{|TF|} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rješenje: Neka je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$. Zbog potencije točke A_1 u odnosu na kružnicu slijedi jednakost

$$t_a \cdot |A_1D| = \frac{a^2}{4}, \text{ odakle je } |A_1D| = \frac{a^2}{4t_a}. \tag{21}$$



Sada, zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo nejednakost

$$|TD| = \frac{t_a}{3} + \frac{a^2}{4t_a} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ odakle je } \frac{1}{|TD|} \leq \frac{\sqrt{3}}{a}. \tag{22}$$

Na isti način dobivamo nejednakosti $\frac{1}{|TE|} \leq \frac{\sqrt{3}}{b}$ i $\frac{1}{|TF|} \leq \frac{\sqrt{3}}{c}$, pa zbrajanjem dobivamo desnu nejednakost

$$\frac{1}{|TD|} + \frac{1}{|TE|} + \frac{1}{|TF|} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Iz (22) zaključujemo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $4{t_a}^2 = 3a^2$, $4{t_b}^2 = 3b^2$ i $4{t_c}^2 = 3c^2$, odakle je $b^2+c^2 = 2a^2$, $c^2+a^2 = 2b^2$ i $a^2+b^2 = 2c^2$. No to je moguće ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokažimo sada lijevu nejednakost. Promotrimo omjer $\frac{|AD|}{|TD|}$. Vrijedi jednakost:

$$\frac{|AD|}{|TD|} = \frac{t_a + \frac{a^2}{4t_a}}{\frac{t_a}{3} + \frac{a^2}{4t_a}} = \frac{4{t_a}^2 + a^2}{4{t_a}^2 + 3a^2} = 3\frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Analogno dobivamo i preostale omjere, pa vrijedi jednakost

$$\frac{|AD|}{|TD|} + \frac{|BE|}{|TE|} + \frac{|CF|}{|TF|} = 3\sum \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 6. \tag{23}$$

Očito, vrijede nejednakosti $|AD| \leq 2R$, $|BE| \leq 2R$ i $|CF| \leq 2R$, zato jer je promjer najdulja tetiva u kružnici. Konačno, iz (23) slijedi nejednakost

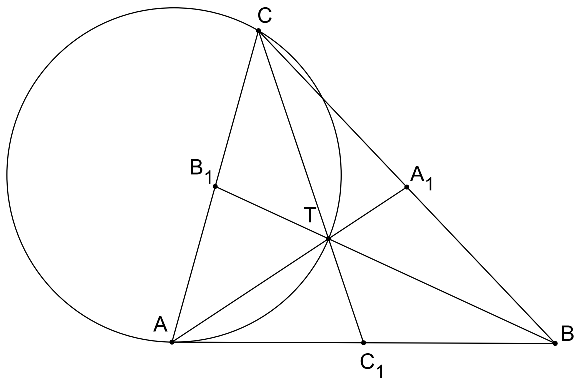
$$6 \leq 2R\left(\frac{1}{|TD|} + \frac{1}{|TE|} + \frac{1}{|TF|}\right),$$

odnosno, tražena nejednakost.

Zadatak 5. (Mongolija, 1999.) Neka je T težište trokuta ABC. Pretpostavimo da kružnica opisana trokutu ATC dodiruje pravac AB. Dokaži nejednakost

$$\sin\sphericalangle CAT + \sin\sphericalangle CBT \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Rješenje: Neka su A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.



Zbog potencije točke C_1 u odnosu na kružnicu, slijedi da je $|AC_1|^2 = |C_1T| \cdot |C_1C|$, odakle je $4{t_c}^2 = 3c^2$. S druge strane $4{t_c}^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$, pa izjednačavanjem tih dviju relacija dobivamo jednakost

$$a^2 + b^2 = 2c^2. \tag{24}$$

Sada, zbog (24) vrijedi $4{t_a}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3b^2$, odakle je $t_a = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, te analogno $t_b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Primjenom poučka o sinusu na trokute AA_1C i B_1BC, te dobivenih formula za težišnice t_a i t_b dobivamo

$$\frac{\sin \sphericalangle CAT}{\sin \gamma} = \frac{a}{b\sqrt{3}} \qquad \text{i} \qquad \frac{\sin \sphericalangle CBT}{\sin \gamma} = \frac{b}{a\sqrt{3}}.$$

Sada, zbog (24) vrijedi:

$$\sin \sphericalangle CAT + \sin \sphericalangle CBT = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{3}} \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \right) = \frac{2 \sin \gamma}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{ab}. \tag{25}$$

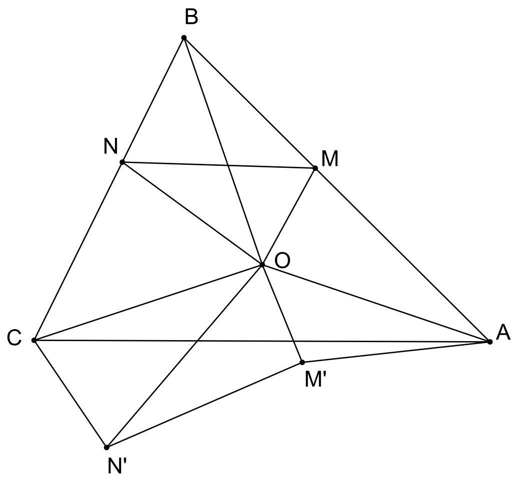
S druge strane, iz poučka o kosinusu i (24) slijedi $\cos \gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{c^2}{2ab}$. Uvrstimo li dobivenu relaciju u (25) lagano dobivamo traženu nejednakost:

$$\sin \sphericalangle CAT + \sin \sphericalangle CBT = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sin 2\gamma = 1$, odnosno $\gamma = 45°$.

Zadatak 6. (Rusija, 2002.) Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom su odabrane točke M i N takve da je $2\sphericalangle NOM = \sphericalangle AOC$. Dokaži da opseg trokuta BNM nije manji od duljine stranice $\overline{AC}$.

Rješenje: Konstruirajmo točke M' i N', kao na slici, tako da je $\sphericalangle BOM = \sphericalangle AOM'$, $\sphericalangle BON = \sphericalangle CON'$, $|OM| = |OM'|$ i $|ON| = |ON'|$.



Iz konstrukcije je jasno da su trokuti BNO i $CN'O$, te MBO i AOM' sukladni. Taj zaključak slijedi iz poučka $S-K-S$. Sada, zbog dobivenih sukladnosti te činjenice da je $2\sphericalangle NOM = \sphericalangle AOC$, slijedi da je $\sphericalangle NOM = \sphericalangle M'ON'$, pa opet, prema poučku $S-K-S$ zaključujemo da su trokuti MNO i $M'ON'$ također sukladni.

Stoga, iz dobivenih triju sukladnosti imamo da je:

$$|BN| = |CN'|, \quad |NM| = |N'M'|, \quad |MB| = |M'A|. \tag{26}$$

Dakle, za opseg trokuta BNM dobivamo da je

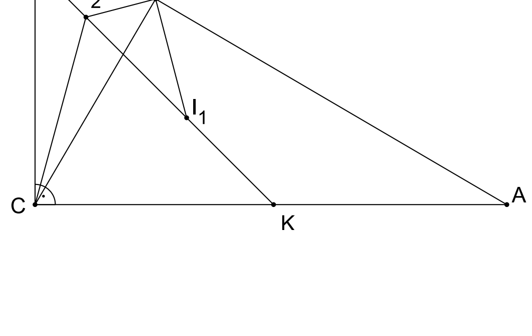
$$o(BNM) = |CN'| + |N'M'| + |M'A| \geq |AC|,$$

pri čemu smo koristili nejednakost trokuta.

Očito, jednakost vrijedi ako i samo ako točke M' i N' pripadaju stranici $\overline{AC}$.

Zadatak 7. (MMO, 1988.) Zadan je pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je D nožište visine na hipotenuzu $\overline{AB}$. Pravac koji prolazi središtima kružnica upisanih u trokute ADC i DBC siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama K i L. Dokažite da je $P(ABC) \geq 2P(CKL)$, pri čemu P označava površinu odgovarajućeg trokuta.

Rješenje: Neka su I_1 i I_2 redom središta kružnica upisanih u trokute ADC i DBC. Očito, trokuti ADC i DBC su slični.



Zbog te sličnosti, udaljenosti središta upisanih kružnica tih trokuta od vrha D odnose se kao odgovarajuće hipotenuze, pa vrijedi razmjer

$$\frac{|I_1D|}{|I_2D|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}. \tag{27}$$

Nadalje, kako su pravci I_1D i I_2D simetrale pravih kutova, slijedi da je

$$\sphericalangle I_1DI_2 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ. \tag{28}$$

Prema tome, pravokutni trokuti I_1DI_2 i ABC imaju jednake omjere duljina kateta, pa su oni slični prema poučku $S-K-S$.

Zbog dokazane sličnosti je $\sphericalangle DI_2I_1 = \beta$. Sada je

$$\sphericalangle LI_2D + \sphericalangle DBL = 180^\circ - \beta + \beta = 180^\circ, \tag{29}$$

pa je četverokut $DBLI_2$ tetivni. Stoga, kako je $\sphericalangle I_2DB = 45^\circ$, slijedi da je $\sphericalangle BLI_2 = 135^\circ$, odnosno $\sphericalangle KLC = 45^\circ$. Zbog toga je pravokutni trokut KLC jednakokračan, odnosno

$$|CK| = |CL|. \tag{30}$$

S druge strane, promotrimo trokute CDI_2 i CI_2L. Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{CI_2}$, te je $\sphericalangle I_2CD = \sphericalangle LCI_2$ i $\sphericalangle CDI_2 = \sphericalangle I_2LC = 45^\circ$. Dakle, oni su sukladni. Iz te sukladnosti slijedi da je $|CL| = |CD|$. Stoga, kako je $\overline{CD}$ visina pravokutnog trokuta, slijedi da je

$$|CK| = |CL| = |CD| = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{31}$$

Konačno, zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\frac{P(ABC)}{P(KLC)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot ab}{\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a^2+b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2,$$

što je i trebalo dokazati.

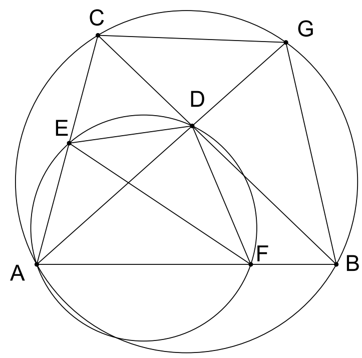
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$, tj. ako je pravokutni trokut ABC jednakokračan.

Zadatak 8. (BMO, 1992.) Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom su dane točke D, E i F takve da je četverokut $AFDE$ tetivni. Dokaži nejednakost

$$\frac{4P(DEF)}{P(ABC)} \leq \left(\frac{|EF|}{|AD|}\right)^2,$$

pri čemu P označava površinu odgovarajućeg trokuta.

Rješenje: Opišimo kružnicu trokutu ABC. Nadalje, neka je točka G sjecište te kružnice s pravcem AD, pri čemu je $A \neq G$.



Prema uvjetu zadatka, točke A, F, D i E leže na kružnici, pa vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DAF = \sphericalangle GAB = \sphericalangle GCB. \tag{32}$$

Pri tome prva jednakost vrijedi jer imamo kutove nad istim lukom u kružnici određenoj točkama A, F, D i E, a treća jednakost, zato jer su to kutovi nad istim lukom kružnice opisane trokutu ABC. Slično je i

$$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DAE = \sphericalangle GAC = \sphericalangle GBC. \tag{33}$$

Iz relacija (32) i (33) zaključujemo da trokuti DEF i BGC imaju iste kutove, odnosno da su slični. Zbog te sličnosti imamo sljedeći razmjer

$$\frac{P(DEF)}{P(BGC)} = \frac{|EF|^2}{|BC|^2}. \tag{34}$$

S druge strane, trokuti BGC i ABC imaju zajedničku stranicu, pa za njihove površine vrijedi sljedeći razmjer:

$$\frac{P(BGC)}{P(ABC)} = \frac{|DG|}{|AD|}. \tag{35}$$

Množenjem jednakosti (34) i (34) dobivamo jednakost

$$\frac{P(DEF)}{P(ABC)} = \frac{|EF|^2}{|BC|^2} \cdot \frac{|DG|}{|AD|}. \tag{36}$$

Nadalje, zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine, te zbog potencije točke D s obzirom na kružnicu opisanu trokutu ABC, imamo:

$$\frac{1}{|BC|^2} = \frac{1}{(|CD| + |DB|)^2} \leq \frac{1}{4|CD| \cdot |DB|} = \frac{1}{4|AD| \cdot |DG|}. \tag{37}$$

Konačno, iz (36) i (37) lagano dobivamo traženu nejednakost:

$$\frac{4P(DEF)}{P(ABC)} \leq \frac{|EF|^2}{|AD| \cdot |DG|} \cdot \frac{|DG|}{|AD|} = \left(\frac{|EF|}{|AD|}\right)^2.$$

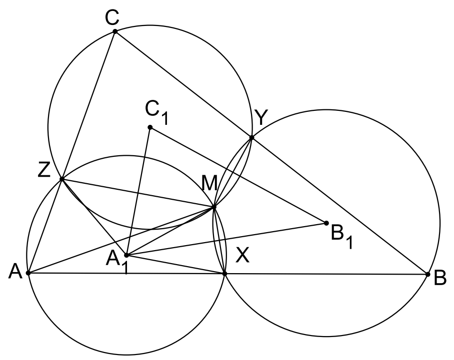
Očito, jednakost vrijedi ako i samo ako je $|CD| = |DB|$, odnosno ako je točka D polovište dužine $\overline{BC}$.

Zadatak 9. (Ibersko-američka matematička olimpijada, 2008.) Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta ABC redom su dane točke X, Y, Z. Nadalje, neka su A_1, B_1, C_1 redom središta kružnica opisanih trokutima AXZ, BYX, CZY. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$P(ABC) \le 4P(A_1B_1C_1),$$

te da jednakost vrijedi ako i samo ako pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze istom točkom. Pri tome P označava površinu odgovarajućeg trokuta.

Rješenje: Dokažimo prvo da sve tri istaknute ktužnice prolaze istom točkom. Naime, neka je $M \neq X$ druga točka presjeka kružnica opisanih trokutima AXZ i BYX.



Tada, iz tetivnih četverokuta $AXMZ$ i $BYMX$ slijedi da je $\sphericalangle XMZ = 180^\circ - \alpha$ i $\sphericalangle YMX = 180^\circ - \beta$. Stoga je

$$\sphericalangle ZMY = 360^\circ - (180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma,$$

pa točka M leži i na kružnici opisanoj trokutu CZY.

Pokažimo sada da su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ slični. U tu svrhu, odrediti ćemo kutove trokuta $A_1B_1C_1$. Naime, imamo da je

$$\sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle C_1A_1M + \sphericalangle MA_1B_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle ZA_1M + \frac{1}{2}\sphericalangle MA_1X = \frac{1}{2}\sphericalangle ZA_1X, \quad (38)$$

pri čemu je srednji znak jednakosti ispunjen zbog simetrije. No kut $\sphericalangle ZA_1X$ je središnji kut kojemu odgovara obodni kut $\sphericalangle ZAX = \alpha$, pa iz (38) slijedi da je $\sphericalangle C_1A_1B_1 = \alpha$. Na isti način slijedi da je $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \beta$ i $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \gamma$. Dakle, trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ su slični, pa vrijedi jednakost

$$\frac{P(ABC)}{P(A_1B_1C_1)} = \left(\frac{|AB|}{|A_1B_1|}\right)^2. \quad (39)$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da je $|AB| \le 2|A_1B_1|$. Da bismo to dokazali uočimo kako su trokuti MAB i MA_1B_1 slični. Naime, vrijedi

$$\sphericalangle MA_1B_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle MA_1X = \sphericalangle MAX = \sphericalangle MAB, \quad (40)$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog simetrije, a druga zbog poučka o središnjem i obodnom kutu. Na isti način dobivamo da je $\sphericalangle A_1B_1M = \sphericalangle ABM$, pa su trokuti MAB i MA_1B_1 slični.

Iz dokazane sličnosti slijedi razmjer

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AM|}{|A_1M|}. \tag{41}$$

Sada, kako duljina tetive $\overline{AM}$ nije veća od promjera kružnice, iz prethodne jednakosti dobivamo da je

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} \leq \frac{2|A_1M|}{|A_1M|} = 2, \tag{42}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je tetiva $\overline{AM}$ promjer kružnice, tj. ako ona prolazi točkom A_1.

Konačno, iz (39) i (42) dobivamo da je

$$\frac{P(ABC)}{P(A_1B_1C_1)} = \left(\frac{|AB|}{|A_1B_1|}\right)^2 \leq 2^2 = 4,$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Već smo uočili kako je u slučaju jednakosti, tetiva $\overline{AM}$ promjer kružnice opisane trokutu AXZ. No tada je i $\overline{BM}$ promjer kružnice opisane trokutu BYX. Nadalje, na isti način kao i prije dokazujemo da su trokuti MB_1C_1 i MBC slični, odakle slijedi da je u slučaju jednakosti tetiva $\overline{CM}$ promjer kružnice opisane trokutu CZY. No tada pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze točkom M, što je i dovoljan uvjet za jednakost.

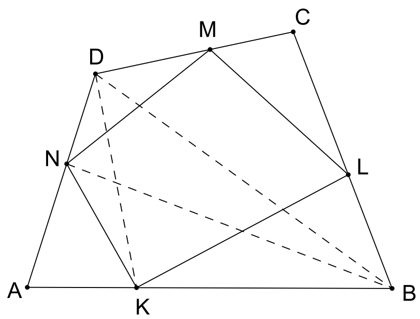
Iz Talesovog poučka lagano zaključujemo kako su tada točke X, Y, Z ortogonalne projekcije točke M na stranice trokuta ABC.

Zadatak 10. (Turska, 2003.) Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ redom su dane točke K, L, M, N. Dokaži nejednakost

$$\sqrt[3]{P(AKN)} + \sqrt[3]{P(BLK)} + \sqrt[3]{P(CML)} + \sqrt[3]{P(DNM)} \leq 2\sqrt[3]{P(ABCD)},$$

pri čemu P označava površinu odgovarajućeg lika.

Rješenje: Usporedimo površinu trokuta AKN s površinom četverokuta $ABCD$.



Kako se površine trokuta s jednakim visinama odnose kao odgovarajuće osnovice, vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} \frac{P(AKN)}{P(ABCD)} &= \frac{P(AKN)}{P(ABN)} \cdot \frac{P(ABN)}{P(ABD)} \cdot \frac{P(ABD)}{P(ABCD)} \\ &= \frac{|AK|}{|AB|} \cdot \frac{|NA|}{|DA|} \cdot \frac{P(ABD)}{P(ABCD)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Stoga, zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{\frac{P(AKN)}{P(ABCD)}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{|AK|}{|AB|}+\frac{|NA|}{|DA|}+\frac{P(ABD)}{P(ABCD)}\right). \tag{44}$$

Na isti način dobivamo još tri nejednakosti:

$$\sqrt[3]{\frac{P(BLK)}{P(ABCD)}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{|KB|}{|AB|}+\frac{|BL|}{|BC|}+\frac{P(ABC)}{P(ABCD)}\right) \tag{45}$$

$$\sqrt[3]{\frac{P(CML)}{P(ABCD)}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{|LC|}{|BC|}+\frac{|CM|}{|CD|}+\frac{P(BCD)}{P(ABCD)}\right) \tag{46}$$

$$\sqrt[3]{\frac{P(DNM)}{P(ABCD)}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{|MD|}{|CD|}+\frac{|DN|}{|DA|}+\frac{P(ACD)}{P(ABCD)}\right). \tag{47}$$

Konačno, zbrajanjem nejednakosti (44), (45), (46), (47) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{\frac{P(AKN)}{P(ABCD)}}+\sqrt[3]{\frac{P(BLK)}{P(ABCD)}}+\sqrt[3]{\frac{P(CML)}{P(ABCD)}}+\sqrt[3]{\frac{P(DNM)}{P(ABCD)}}\\
&\quad\leq \frac{|AK|+|KB|}{3|AB|}+\frac{|BL|+|LC|}{3|BC|}+\frac{|CM|+|MD|}{3|CD|}+\frac{|DN|+|NA|}{3|DA|}\\
&\qquad+\frac{P(ABD)+(BCD)}{3P(ABCD)}+\frac{P(ABC)+(ACD)}{3P(ABCD)}\\
&\quad=\frac{|AB|}{3|AB|}+\frac{|BC|}{3|BC|}+\frac{|CD|}{3|CD|}+\frac{|DA|}{3|DA|}+\frac{P(ABCD)}{3P(ABCD)}+\frac{P(ABCD)}{3P(ABCD)}\\
&\quad=6\cdot\frac{1}{3}=2,
\end{aligned}$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Jednakost u zadanoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako su istovremeno ispunjene jednakosti u (44), (45), (46) i (47). Jednakost u (44) vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{|AK|}{|AB|}=\frac{|NA|}{|DA|}=\frac{P(ABD)}{P(ABCD)}=\alpha, \qquad 0<\alpha<1. \tag{48}$$

Tada, ako su ispunjene jednakosti u (45), (46) i (47) mora redom vrijediti:

$$\frac{|KB|}{|AB|}=\frac{|BL|}{|BC|}=\frac{P(ABC)}{P(ABCD)} = 1-\alpha, \tag{49}$$

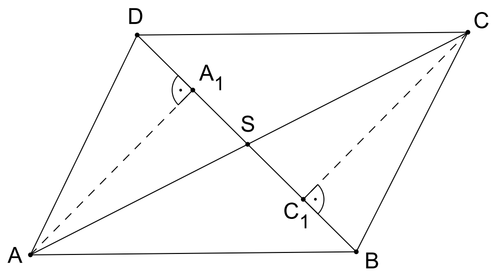
$$\frac{|LC|}{|BC|}=\frac{|CM|}{|CD|}=\frac{P(BCD)}{P(ABCD)} = \alpha, \tag{50}$$

$$\frac{|MD|}{|CD|}=\frac{|DN|}{|DA|}=\frac{P(ACD)}{P(ABCD)} = 1-\alpha. \tag{51}$$

No iz relacija (48) i (50) imamo da je $P(ABD)=\alpha P(ABCD)$ i $P(BCD)=\alpha P(ABCD)$, odakle zbrajanjem slijedi da je $P(ABCD)=2\alpha P(ABCD)$. Stoga je $\alpha=\dfrac{1}{2}$ pa su točke K, L, M, N polovišta stranica četverokuta $ABCD$.

Pokažimo još da u slučaju jednakosti četverokut $ABCD$ mora biti paralelogram. Naime, kako je $\alpha = \frac{1}{2}$, iz relacija (48), (49), (50) i (51) zaključujemo kako trokuti ABC, BCD, ACD, ABD imaju jednake površine.

Posebno, kako trokuti ABD i BCD imaju zajedničku stranicu $\overline{BD}$, slijedi da su im visine na tu stranicu sukladne, tj. $|AA_1| = |CC_1|$, pri čemu su A_1 i C_1 nožišta okomica iz točaka A i C na pravac BD.



Promotrimo sada pravokutne trokute ASA_1 i CSC_1, pri čemu je S sjecište dijagonala četverokuta. Ta dva trokuta imaju jednake kutove te kako je $|AA_1| = |CC_1|$, slijedi da su ti trokuti sukladni. Iz pokazane sukladnosti slijedi da je $|AS| = |SC|$, odnosno točka S je polovište dijagonale $\overline{AC}$. Na isti način pokazujemo da je točka S također polovište dijagonale $\overline{BD}$, pa je četverokut $ABCD$ paralelogram.

Konačno, jednakost u zadanoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ paralelogram te ako su točke K, L, M, N polovišta njegovih stranica.