Djeljivost

Metoda faktorizacije

1. U cijelim brojevima riješite jednadžbu
$$(m^2+n)(m+n^2)=(m+n)^3.$$

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi
$$5^n+2^{n+1}3^n=9^n+4^n.$$

3. Za koje cijele brojeva x je $2x^2-x-36$ kvadrat prostog broja?

Rastav na proste faktore i broj djelitelja

4. Može li broj koji se sastoji od 100 šestica i nekog broja nula biti potpun kvadrat? A ako se sastoji od 600 šestica i nekog broja nula?

5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje jednadžba
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$
ima točno 5 rješenja.

6. Na koliko načina se broj $\frac{2015}{2014}$ može prikazati kao umnožak dva razlomka oblika $\frac{n+1}{n}$ za neki prirodni broj n?

7. Neka su n i d prirodni brojevi takvi da d dijeli $2n^2$. Dokaži da broj n^2+d nije potpun kvadrat.

Najveći zajednički djelitelj

8. Dokaži da su razlomci $\frac{12n+1}{30n+2}$ i $\frac{21n+4}{14n+3}$ do kraja skraćeni.

9. U prirodnim brojevima riješi jednadžbu $a^{5a}=b^b$.

10. Ako za prirodne brojeve x i y vrijedi $2x^2+x=3y^2+y$, dokaži da su $x-y$, $2x+2y+1$ i $3x+3y+1$ potpuni kvadrati.

11. Odredi sve proste brojeve p za koje postoje prirodni brojevi x i y takvi da vrijedi
$$\begin{cases} p+1 &= 2x^2 \\ p^2+1 &= 2y^2. \end{cases}$$

Metoda kvocijenta

12. Odredi sve cijele brojeve a takve da je

$$\frac{a^3 - a^2 - a - 1}{3a - 1}$$

cijeli broj.

13. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takvih da $a^2 + b$ dijeli $a^2b + a$ i $b^2 - a$ dijeli $ab^2 + a$.

14. Odredi sve parove prirodnih brojeva (d, n) za koje d dijeli n i $dn + 1$ dijeli $d^2 + n^2$.

Smještavanje među uzastopne kvadrate

15. Dokaži da ne postoji prirodan broj n takav da je n^2+n+1 potpun kvadrat.

16. Postoje li prirodni brojevi m i n za koje su m^2+n i n^2+m kvadrati prirodnih brojeva?

17. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3.$$

Računanje sa ostacima

18. Dokaži da jednadžba

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

nema cjelobrojnih rješenja.

19. Dokaži da jednadžba $19x^3 - 84y^2 = 1984$ nema rješenja u cijelim brojevima.

20. Neka je $A = 3^{105} + 4^{105}$. Dokaži da 7 dijeli A, te odredi ostatke pri dijeljenju broja A sa 11 i 13.

21. Odredi sve proste brojeve p takve da je $2^p + p^2$ također prost.

Mali Fermatov i Eulerov teorem

22. Odredi posljednje tri znamenke broja 7^{9999}.

23. Odredi posljednjih osam znamenaka broja 27^{1986}.

24. Odredi sve prirodne brojeve m koji su relativno prosti s $2^n + 3^n + 6^n - 1$ za sve prirodne brojeve n.

Dodatni zadaci

25. Za prirodne brojeve a i b dokaži $M(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{M(a,b)} - 1$.

26. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje je

$$\left(\frac{2x^3}{y} + 1\right)^2 = 9 + 4y.$$

27. Odredi sve prirodne brojeve n takve da $\varphi(n)$ dijeli n.

28. Odredi sve parove cijelih brojeva (x, y) takvih da vrijedi

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

29. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj čiji su djelitelji $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Dokaži da je $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k$ uvijek manji od n^2, te odredi kada je djelitelj broja n^2.

30. Pokaži da jednadžba $y^2 = x^3 + 7$ nema rješenja u cijelim brojevima.

31. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x + y^2 + d^3 = xyd$, pri čemu je $d = M(x, y)$.