IMO pripreme 2015. Nikola Adžaga, 16. 6. 2015.

Kombinatorna teorija brojeva

Uvod

U ovom predavanju proći ćemo razne zadatke koji zahtjevaju poznavanje i kombinatorike i teorije brojeva. Iako je to jedino zajedničko svim zadacima, dio njih spadat će u dva bliska područja – aditivna kombinatorika i aditivna teorija brojeva.

Aditivna teorija brojeva – neki rezultati

Jedan klasični poznati teorem je Cauchy-Davenport, koji se može iskazati na sljedeći način: Ako je t prirodan broj i $x_1, x_2, \ldots, x_t$ ne-nul elementi od $\mathbb{Z}_p$ (ostaci modulo p) koji nisu nužno različiti. Tada se barem $\min\{p, t+1\}$ elemenata od $\mathbb{Z}_p$ da napisati kao zbroj brojeva x_i .

Pomoću tog teorema da se dokazati Erdős-Ginzburg-Ziv teorem – svaki skup od $2n-1$ cijelih brojeva sadrži n-člani podskup čiji je zbroj elemenata djeljiv s n.

Od novijih rezultata poznat je Green-Tao teorem: skup prostih brojeva sadrži proizvoljno duge aritmetičke nizove.

Aditivna kombinatorika

Bavi se općenitijim problemima, najčešće vezanim za prisutnost aritmetičkih nizova u nekim skupovima. Poznat je rezultat Rothov teorem – za svaki pozitivan $\delta \leqslant 1$ postoji prirodan broj $N = N(\delta)$ takav da svaki podskup od $\{1, 2, \ldots, N\}$ veličine barem δN sadrži tročlani aritmetički niz.

To je dobar predstavnik jednog tipa problema u aditivnoj kombinatorici – koliko veliki može biti podskup nekog fiksnog skupa bez da sadrži određenu strukturu?

Druga vrsta problema su inverzni problemi. Ako je A skup prirodnih brojeva takav da je $|A+A| \leqslant 3|A|$, što možemo reći o A? Za neki slučajno odabran skup A očekivali bismo da je veličina od $A+A$ otprilike $|A|^2$, ali ako je A aritmetički niz, znamo da je $|A+A| = 2|A|-1$. Mora li A za koji je $|A+A| \leqslant 3|A|$ biti aritmetički niz?

Nećemo ulaziti u dokaze ovih teorema (iako neki imaju elementarne dokaze) – sve što treba zapamtiti odavdje je da ima smisla tražiti aritmetičke nizove u određenim skupovima, ili npr. trojke takve da je $a+b \geqslant c$, i sl.

Zadaci

1. Za skup A, neka $|A|$ i $s(A)$ redom označavaju broj članova A i sumu članova iz A.
   Neka je S skup prirodnih brojeva takav da:
   (a) postoje dva broja $x, y \in S$ takvi da im je mjera 1
   (b) za bilo koja dva broja $x, y \in S, x + y \in S$.

   Neka je $T = \mathbb{N} \setminus S$. Dokažite $s(T) \leq |T|^2 < \infty$.

   (prijedlog za USAMO 2000., 102 Combinatorial Problems).

2. Dan je skup $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$. Obriši barem $n-1$ broj iz A prema sljedećim pravilima:
   - Ako je broj a izbrisan te je $2a \in A$, onda moraš izbrisati i broj $2a$.
   - Ako su brojevi a i b izbrisani te je $a + b \in A$, onda moraš izbrisati i broj $a + b$.

   Neka je S zbroj obrisanih brojeva. Odredi minimalnu moguću vrijednost od S.

   (Vijetnamska olimpijada 1990.)

3. Neka je A skup prvih 16 prirodnih brojeva. Nađi najmanji prirodan broj k sa sljedećim svojstvom: U svakom podskupu od A s k elemenata postoje dva različita broja a i b takvi da je $a^2 + b^2$ prost.

   (Vijetnamska olimpijada 2004.)

4. Neka je S skup od 2004 prirodna broja. Za svaki $a \in S$ neka je $f(a)$ broj brojeva u S koji su relativno prosti s a. Pretpostavimo da je $f(a) < 2003$ isti za sve $a \in S$. Nađi najmanji k takav da svaki podskup od k elemenata od S sadrži dva broja koja nisu međusobno relativno prosta.

   (Viet Nam TST 2004.)

5. Neka je X konačan skup prirodnih brojeva, $A \subseteq X$. Dokažite da postoji $B \subseteq X$ takav da je A jednak skupu brojeva iz X koji dijele neparno mnogo članova B.

6. Na početku igre za 2 igrača (igraju naizmjence), broj 2015! napisan je na ploči. U svakom potezu, igrač izabere prirodni broj s najviše 20 različitih prostih faktora, koji je manji ili jednak od onog na ploči. Broju na ploči oduzme se taj (izabrani) broj. Pobjednik je igrač koji napiše 0. Koji igrač sigurno može pobijediti, i kako? *(Turnir gradova, proljeće 2004., Senior A)*

7. Prije početka igre, Ivan zamisli prirodan broj veći od 100. Marija zatim bira prirodan broj $d > 1$. Ako je Ivanov broj djeljiv s d, Marija pobjeđuje. U suprotnom, Ivan oduzima d i igra se nastavlja (s novim brojem). Marija ne smije ponoviti broj. Kad Ivanov broj postane negativan, Marija je izgubila. Postoji li pobjednička strategija za Mariju? *(Turnir gradova, proljeće 2003., Senior A)*

8. Rastući niz $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \ldots$ sadrži sve prirodne brojeve koji su potencija broja 3 ili suma različitih potencija broja 3. Nađite 100. član tog niza. *(AIME 1986.)*

9. Neka je A skup prirodnih brojeva takav da je $|A| = 2001$. Dokažite da postoji skup B takav da vrijedi

   - $B \subseteq A$
   - $|B| \geqslant 668$
   - $\forall u, v \in B$ (ne nužno različite), $u + v \notin B$.

   (USA TST 2001.)

10. Neka je p neparan prost broj. Nađite broj svih podskupova A skupa $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tako da

    - A ima točno p elemenata, i
    - zbroj svih elemenata skupa A je djeljiv s p.

    (IMO 1995./6.)

Zadaci za samostalan rad

1. Odredite najmanji prirodni broj $n \geqslant 4$, za koji je između svakih n različitih prirodnih brojeva moguće odabrati 4 različita a, b, c, d tako da je $a+b-c-d$ djeljivo s 20. *IMO Shortlist 1998., N2*

2. Neka je $p > 2$ prost broj. Promotrimo poligon s p bridova s majmunom na svakom vrhu. Daj p banana majmunima po sljedećim pravilima. Prvu daj bilo kojem. Zatim odi tri vrha u smjeru kazaljke na satu i drugu daj majmunu na tom vrhu, ..., $(k+1)$. bananu daj majmunu na $(2k+1)$. vrhu dalje od majmuna s k-tom bananom (u istom smjeru).

   - Koliko majmuna ne dobije nijednu bananu?
   - Koliko bridova poligona ima svojstvo da su majmuni na oba njegova kraja dobili banane?

   Viet Nam TST 1999.

3. Dana su dva prirodna broja $m, n > 1$ gdje m nije djeljiv s n. Nađi najmanji prirodni $k > 1$ sa svojstvom da za k proizvoljnih cijelih $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvih da za svaki izbor $1 \leqslant i < j \leqslant k$ broj $a_i - a_j$ nije djeljiv s n, postoje dva broja $a_s, a_t (s \neq t)$ među njima takvi da je $a_s - a_t + m$ djeljivo s n.

   (Viet Nam TST 1992.)

Dodatni izvori zadataka

- Matija Bašić, *Brojevne baze*, http://web.math.pmf.unizg.hr/ mbasic/materijali.htm
- coach.rar