Linearna algebra u kombinatorici

Osnovni pojmovi i rezultati linearne algebre

Prvo što nam je potrebno je znati što je to uopće **polje**? Osnovne primjere, jasno, znamo, npr. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Navedimo općenitu definiciju:

Polje *je neprazan skup* $\mathbb{F}$ *s operacijama* $+ : \mathbb{F}\times\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *(zbrajanje) i* $\cdot : \mathbb{F}\times\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *(množenje) takvima da je:*

- (asocijativnost operacija), $a + (b + c) = (a + b) + c$ i $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, za sve a, b, c iz $\mathbb{F}$.
- (komutativnost operacija), $a + b = b + a$ i $a \cdot b = b \cdot a$, za sve a, b $\in \mathbb{F}$.
- (neutralni elementi), postoje $0 \in \mathbb{F}$ i $1 \in \mathbb{F}$ takvi da je $0 + a = a$ i $1 \cdot a = a$, za sve $a \in \mathbb{F}$.
- (inverzi), za svaki $a \in \mathbb{F}$ postoji $-a \in \mathbb{F}$ takav da je $a + (-a) = 0$, također, za svaki $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, postoji $a^{-1} \in \mathbb{F}$ takav da je $a \cdot a^{-1} = 1$.
- (distributivnost množenja prema zbrajanju), $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, za sve a, b, c, $\in \mathbb{F}$.

Primjer 1. (zadatak za zagrijavanje) Neka je $\mathbb{F}$ polje. Dokažite da su 0, 1, $-a$, a^{-1} jedinstveni. Ako je $|\mathbb{F}| > 1$, dokažite da je $0 \neq 1$.

Osim klasičnih primjera polja, ono što se često pojavljuje su polja

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

uz operacije zbrajanja i množenja modulo p. Ovdje nam je p, jasno, prost broj. Možete li dokazati da je ovo polje?

Od glavnog interesa (kao što ćemo i vidjeti kroz zadatke) će nam biti polje $\mathbb{Z}_2$. Nije na odmet posebno napomenuti: **Svi ovdje navedeni rezultati vrijede za slučaj bilo kojeg polja $\mathbb{F}$!**

Idući korak (prije hrvanja sa zadacima) nam je uvesti (osnovne) pojmove linearne algebre, kao što su: **vektor**, **linearna (ne)zavisnot**, **skalarni produkt**, **matrica**, **rang**, **determinanta**, itd.

Iako se može općenito definirati, nama to ovdje nije potrebno pa ćemo se držati jednostavnijeg prikaza.

Za $n \in \mathbb{N}$ ćemo s $\mathbb{F}^n$ označavati **vektorski prostor** svih uređenih n-torki elemenata iz $\mathbb{F}$ koje ćemo zvati **vektori**. Zbrajanje i množenje skalarom vektora ćemo definirati po koordinatama. Preciznije, za vektore $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ te skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ imamo:

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \qquad \text{i} \qquad \alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Za vektore $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{F}^n$ ćemo reći da su **linearno nezavisni** ako vrijedi: *Ako su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ skalari takvi da je*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = 0,$$

onda je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. U suprotnom ćemo reći da su linearno ***zavisni****.*

Za vektore $a_1, a_2, \ldots a_m \in \mathbb{F}^n$, ili općenito za podskup $S \subseteq \mathbb{F}^n$ ćemo sa

$$\langle a_1, a_2, \ldots a_m \rangle \text{, odnosno sa } \langle S \rangle \,,$$

označavati potprostor razapet sa skupom S. Točnije, $\langle S \rangle$ se sastoji od svih mogućih **linearnih kombinacija** vektora iz S. Linearna kombinacija vektora je suma tih vektora pomnoženih sa skalarima.

Baza vektorskog prostora je linearno nezavisni **sistem izvodnica**. Skup $S \subseteq \mathbb{F}^n$ je sistem izvodnica za $\mathbb{F}^n$, ako je $\langle S \rangle = \mathbb{F}^n$. **Dimenzija** vektorskog prostora je broj elemenata njegove baze.

Primijetimo da definicija dimenzije ima smisla jedino ako znamo da svake dvije baze vektorskog prostora imaju jednak broj elemenata. Na svu sreću, to je točno!

Teorem 1.

- *Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$ je n.*
- *Svaki linearno nezavisan skup vektora u $\mathbb{F}^n$ sadrži $\leq n$ elemenata. Svaki sistem izvodnica za $\mathbb{F}^n$ sadrži $\geq n$ elemenata.*

Napomenimo još i sljedeće: **Ako je $\mathbb{F}$ *konačno polje* onda je broj elemenata svakog potprostora V od $\mathbb{F}^n$ jednak $|\mathbb{F}|^{\dim V}$.**

Primjer 2. Pokažite da se svaki vektor može na jedinstven način zapisati u bazi.

Ova naša priča o bazi vektorskog prostora je za konačno dimenzionalne vektorske prostore. Ono što je zanimljivo je da baza postoji čak i ako je vektorski prostor beskonačno dimenzionalan.

Hamelova baza vektorskog prostora $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$ je skup realnih brojeva $(r_i)_{i \in I}$ koji je linearno nezavisan (svaki konačan podskup mu je linearno nezavisan) i takav da se svaki $x \in \mathbb{R}$ može prikazati u obliku:

$$x = \sum_{k=1}^{n} q_k r_k,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ koji ovisi o x, q_k su racionalni brojevi, a r_k su elementi baze. Dakle, imajmo na umu da znamo da Hamelova baza za $\mathbb{R}$ postoji!

Primjer 3. Neka je u krug raspoređeno $n \geq 3$ realnih brojeva tako da za svaka tri uzastopna vrijedi da je jedan od njih jednak aritmetičkoj sredini preostala dva. Dokažite da su ili svi brojevi međusobno jednaki ili je n djeljiv s 3.

Prije nego uvedemo iduće objekte (matrice) definirajmo još skalarni produkt vektora. Opet, ovo se može napraviti puno općenitije, ali za naše potrebe je iduće i više nego dovoljno.

Skalarni produkt dvaju vektora $a,\, b \in \mathbb{F}^n$ definiramo kao:

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k},$$

ovdje nam je $\overline{b_k}$ oznaka za kompleksni konjugat broja b_k. Jasno, kako ćemo se mi baviti samo realni prostorima, to nam neće predstavljati nikakvu ulogu.

Skalarni produkt je funkcija koja svakom paru vektora pridruži skalar. Popišimo osnovna svojstva skalarnog produkta:

- $a \cdot a \geq 0$ i $a \cdot a = 0$, ako i samo ako je $a = 0$,
- $b \cdot a = \overline{a \cdot b}$,
- $(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha a \cdot c + \beta b \cdot c$.

Zanimljivost! Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i imamo li preslikavanje $\langle \cdot,\, \cdot \rangle : V \times V \to V$ koje zadovoljava gore popisana svojstva skalarnog produkta, onda vrijedi nejednakost Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky:

$$|\langle a,\, b\rangle|^2 \leq \langle a,\, a\rangle \langle b,\, b\rangle\,.$$

Primjer 4. (St. Petersburg) Učenici u grupama od po barem dvoje odlaze po sladoled. Nakon što je $k > 1$ grupa otišlo, svaka dva studenta su otišla zajedno točno jednom. Dokažite da je broj studenata najviše jednak k.

Matrica $m \times n$ je naprosto tablica s m redaka i n stupaca koja na svakom mjestu ima upisan neki skalar iz $\mathbb{F}$.

$$A = (a_{i,j})_{i=1,\,2,\,\dots,\,m,\;\, j=1,\,2,\,\dots,\,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matrice zbrajamo jednostavo po koordinatama, tako ih također i množimo sa skalarima. **Množenje matrica** je ipak nešto kompliciraniji postupak.

Neka su A i B, redom $m \times n$ i $n \times k$ matrice, tada je produkt $AB = C$ matrica tipa $m \times k$. Dakle, da bi imalo smisla množiti matrice one moraju biti ulančane, tj. broj stupaca prve, mora biti jednak broju stupaca druge. Moramo još definirati što je uopće matrica C?

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Napomenimo da, najprije, umnožak BA ne mora uopće biti definiran, a ako je, tada ne mora vrijediti da je $AB = BA$. Dakle, općenito je $AB \neq BA$. Znate li navesti primjer nekih matrica koje ne komutiraju? (ali da je množenje dobro definirano u oba poretka)

Prostor svih matrica $m \times n$ označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$. Dimenzija tog prostora je mn.

Za matricu $A \in M_{mn}$, s A^t označavamo **transponiranu matricu**, to je matrica tipa $n \times m$ čiji su koeficijenti jednaki a_{ji}.

Rang matrice je broj linearno nezavisnih stupaca matrice. Taj broj je uvijek jednak broju linearno nezavisnih redaka! Za matricu A, njen rang ćemo označavati s $r(A)$. Osnovno o rangu, za matrice A, $B \in M_{m,n}$ i $C \in M_{n,k}$:

- $r(A) \leq \min(m, n)$,
- $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$,
- $r(AC) \leq \min(r(A), r(C))$.

Promotrimo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Stavimo li da je $A = (a_{i,j})$ vidimo da taj sustav možemo zapisati kao:

$$Ax = b,$$

ovdje su x i b vektor stupci, tj. matrice tipa $m \times 1$.

Teorem 2 (Kronecker Capelli). *Gornji sustav ima rješenje ako i samo ako je $r(A) = r(A_p)$ gdje je matrica A_p (proširena) nastala od matrice A dodavanjem stupca b.*

Pretpostavimo da gornji sustav ima rješenja. Znamo da ih on tada ima ili jedno ili beskonačno (ako smo nad beskonačnim poljem). No, svako rješenje sustava možemo zapisati u obliku

$$x_1 + x_0,$$

gdje je x_1 bilo koje rješenje (partikularno), a x_0 bilo koje rješenje pripadne homogene (kada je $b = 0$) jednadžbe.

Defekt matrice A je dimenzija prostora svih rješenja jednadžbe $Ax = 0$, oznaka je $d(A)$.

Teorem 3 (o rangu i defektu). *Ako je $A \in M_{m,n}$, onda je $r(A) + d(A) = n$.*

Primjer 5. (VJIMC, autor: Vjekoslav Kovač) Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $k \leq n-1$. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ neprazni podskupovi skupa S. Dokažite da je moguće obojiti neke elemente od S u dvije boje, crvenu i plavu, tako da vrijede sljedeći uvjeti:

1. Svaki element od S je neobojen ili je obojen u crveno ili plavo.
2. Barem jedan element skupa S je obojen.
3. Svaki skup A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) je ili čitav neobojen ili je barem jedan element obojen crveno i barem jedan element obojen plavo.

Ovdje stajemo s općenitim matrica i prelazimo na one koje će nama biti zanimljive. To su kvadratne matrice, tj. one tipa $n \times n$. Prostor tih matrica se označava jednostavno M_n, a ne $M_{n,n}$. U prostoru kvadratnh matrica postoji nešto što nazivamo **identiteta** ili **jedinična matrica**. To je matrica $I = (\delta_{i,j})$, gdje je $\delta_{i,j}$ Kroneckerova delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Za identitetu vrijedi da je $AI = IA = A$, za sve $A \in M_n$. Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je **regularna** ili **invertibilna** ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da je $AB = BA = I$. Takvu matricu B onda označavamo s A^{-1}. Matricu koja nije regularna nazivamo singularna.

Teorem 4. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako ima potpun rang, tj. ako je $r(A) = n$.*

Primijetimo da je matrica A regularna ako i samo ako je $d(A) = 0$, a to znači da je regularna ako i samo ako ne postoji netrivijalan vektor x takav da je $Ax = 0$.

Rang se (na svu sreću) ne mora uvijek računati direktno po definiciji (tj. skoro nikad ga nećete tako računati). Naime, postoji nešto što se zove **elementarne transformacije** matrice. One su:

1. dodavanje jednog retka (stupca), pomnoženog nekim skalarom, nekom drugom retku (stupcu), točnije: uzmemo li redak (stupac) i i redak (stupac) j $(i \neq j)$, tada je rang matrice A isti kao rang matrice u kojoj smo redak (stupac) j zamijenili retkom (stupcom) $j + \alpha i$,

2. zamjena bilo koja dva retka ili stupca matrice A,

3. množenje jednog retka (stupca) sa skalarnom $\neq 0$.

Korištenjem elementarnih transformacija možemo matricu lako svesti na nešto što se zove **gornje trokutasta** matrica (svi elementi ispod glavne dijagonale $(i = j)$ su jednaki 0). Jasno je da je takvim matricama lako očitati rang.

Uvedimo još jedan pojam koji će nam trebati prije no što (NAPOKON) prijeđemo na toliko iščekivane zadatke.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ definiramo njenu determinantu:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Ovdje je $\operatorname{sgn}\sigma$ **parnost** permutacije σ. Definira se kao broj **transpozicija** u permutaciji σ, pogledamo taj broj modulo 2. Transpozicija je svaki par indeksa $i < j$ takav da je $\sigma(i) > \sigma(j)$. Vrijedi da je: $\det A^t = \det A$.

Teorem 5 (Binet Cauchy)**.** $\det(AB) = \det A \det B$.

Primijetimo: Ako nam je polje $\mathbb{Z}_2$, u tom polju vrijedi $-1 = 1$ pa nam onda u definiciji determinante zapravo nema člana $(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}$.

Determinantu matrice također ne moramo (iako je nekada zgodno) računati po definiciji. Najprije, postoji nešto što se zove Laplaceov razvoj po retku, odnosno

po stupcu:
Za svaki i vrijedi da je:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

ovdje je A_{ij} matrica dobivena iz matrice A izbacivanjem retka i i stupca j. Ista formula vrijedi fiksirao li j i sumiramo po i.

Determinanta se također dobro ponaša pri elementarnim transformacijama. Pri transformaciji 1 determinanta se ne mijenja. Pri transformaciji 2 determinanta mijenja predznak, dok pri transformaciji 3 se cijela determinant pomnoži tim skalarom. Sva ova pravila se vide direktno iz definicije determinante.

Također ako je matrica gornje ili donje trokutasta, tada je njena determinanta jednaka umnošku dijagonalnih elemenata (što se opet lako vidi iz definicije). Lako izrčaunamo da je

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Teorem 6. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je* $\det A \neq 0$.

Primjer 6. Izračunajte determinantu $n \times n$ matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primjer 7. Neka je $n > 1$ prirodan broj i neka je, za $\sigma \in S_n$, $I(\sigma) = 1$ ako je σ parna permutacija, a $I(\sigma) = -1$ ako je σ neparna permutacija. Neka je $f(\sigma)$ broj fiksnih točaka permutacije σ. Odredite sva rješenja jednadžbe

$$\sum_{\sigma \in S_n} I(\sigma) x^{f(\sigma)} = 0,$$

u skupu pozitivnih realnih brojeva.

Za vektore $a, b \in \mathbb{F}^n$ kažemo da su **ortogonalni** ako je $a \cdot b = 0$. Ako je $S \subseteq \mathbb{F}^n$ definiramo njegov ortogonalni komplement kao skup svih vektora okomitih na sve vektore uz S. Oznaka je $S^\perp$.

Činjenica je da je $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$, također $S^\perp$ je uvijek potprostor od $\mathbb{F}^n$. Vrijedi da je:

$$\dim \langle S \rangle^\perp = \dim \mathbb{F}^n - \dim \langle S \rangle = n - \dim \langle S \rangle.$$

Primjer 8. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ različiti podskupovi od $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da je $|A_i \cap A_j|$ paran broj za sve $i \neq j$.

(a) Ako je $|A_i|$ paran broj za sve i, koliko najviše može biti m, u odnosu na n?

(b) Ako je $|A_i|$ neparan broj za sve i, isto pitanje?

Zadaci

1. Odredite najmanji prirodni broj n sa svojstvom: *Ako su* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *realni brojevi takvi da postoji* n *različitih odabira cijelih brojeva* $1 \leq p < q < r \leq 5$ *takvih da je* $x_p+x_q+x_r = 0$, *onda je* $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

2. (Fisherova nejednakost, primjer 4) Neka su A_1, A_2, ..., A_m različiti podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pretpostavimo da postoji cijeli broj $1 \leq \lambda \leq n$ takav da je $|A_i \cap A_j| = \lambda$, za sve $i \neq j$. Tada je $m \leq n$.

3. Dan je prirodan broj n i n-člani skup S. Neka je

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

familija koja se sastoji od n međusobno različitih podskupova skupa S. Dokažite da postoji $x \in S$ takav da su svi skupovi

$$A_1 \cup \{x\},\ A_2 \cup \{x\},\ \ldots,\ A_n \cup \{x\}$$

međusobno različiti.

4. (Iran TST 1996, Germany TST 2004) Neka je G konačan i jednostavan graf kojem je svaki vrh obojen u bijelo. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati vrh i promjeniti boju (bijelo u crno ili crno u bijelo) tom vrhu i svim njegovim susjedima. Dokažite da je moguće postići da su svi vrhovi crni.

5. (Gallaijev teorem) Skup vrhova svakog jednostavnog grafa se može particionirati u dva skupa (ne nužno neprazna) tako da svaki skup vrhova inducira podgraf u kojemu su svi vrhovi parnog stupnja. Dokažite.

6. U senatu je 2015 senatora. Svaki senator ima neprijatelje unutar senata (po principu, ako si ti neprijatelj meni, onda sam bome i ja tebi). Dokažite da postoji neprazan podskup K skupa svih senatora takav da svaki senator u senatu ima paran broj neprijatelja u skupu K.

7. (Moldova TST 2005) Postoji li konfiguracija od 22 različite kružnice i 22 različite točke u ravnini takve da svaka kružnica sadrži barem 7 točaka i svaka točka pripada barem 7 kružnica?

8. Neka su a_1, a_2, ..., a_{2n+1} realni brojevi takvi da, za svaki $1 \leq i \leq 2n+1$, možemo maknuti a_i te ostalih $2n$ brojeva podijeliti u dvije grupe od n brojeva čija je suma jednaka. Dokažite da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1}$.

9. Dokažite: ako su svi kostupnjevi (kostupanj para vrhova je broj vrhova koji su incidentni s oba vrha) jednostavnog grafa s n vrhova neparni, onda je n neparan.

10. Na tulumu se nalazi $2n$ ljudi. Svaka osoba ima paran broj prijatelja (prijateljstvo smatramo simetričnom relacijom). Dokažite da postoje dvije osobe koje imaju paran broj zajedničkih prijatelja na tulumu.

11. (slično kao prethodni zadatak, ali nije isto, zašto?) Za skup T kažemo da je paran ako ima paran broj elemenata. Neka je n paran prirodan broj i neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ parni podskupovi skupa $\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$. Dokažite da postoje neki $i \neq j$ takvi da je $|S_i \cap S_j|$ paran broj.

12. Imamo n novčića nepoznatih masa i ravnotežnu vagu s dvije zdjelice. Smijemo staviti nekoliko novčića na jednu zdjelicu i isti broj novčića na drugu. Ono što možemo nakon toga očitati na vagi je koja je zdjelica teža ili su pak jednake. Pokažite da je potrebno barem $n-1$ takvih vaganja da bismo mogli zaključiti da su svi novčići jednake mase.

13. (USAMO 2008, problem 6) Na matematičkoj konferenciji, svaka dva matematičara su ili prijatelji ili stranci. U vrijeme ručka, svaki matematičar ruča u jednoj od dvije velike menze. Svaki matematičar inzistira na tome da ruča u menzi u kojoj se nalazi paran broj njegovih prijatelja. Dokažite da je broj načina na koje se matematičare može rasporediti u dvije menze potencija broja 2.

14. (IMO SL 1998, C2) Pretpostavimo da imamo tablicu $m \times n$ realnih brojeva takvu da je suma svakog retka i suma svakog stupca cijeli broj. Dokažite da je moguće zaokužiti na više ili na manje (dakle, napraviti $\lceil\cdot\rceil$ ili $\lfloor\cdot\rfloor$) svaki koeficijent tako da sume ostanu jednake.

15. (China West 2002)
Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ neprazni podskupovi od $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažite da postoje neprazni i disjunktni $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n+1\}$ takvi da je
$$\bigcup_{k\in I} A_k = \bigcup_{k\in J} A_k.$$

16. (Russia 2001) Na natjecanju s n zadataka je sudjelovalo m natjecatelja. Svaki zadatak je vrijedio određen (prirodan) broj bodova i nisu se mogli dobiti parcijalni bodovi. Nakon što su svi radovi bodovani, ispostavilo se da bi se mijenjanjem bodova na zadacima mogao postići bilo koji (striktan) redoslijed natjecatelja. Koliko najviše može iznosti broj m, u odnosu na n?

17. (Russia 1998) Svako polje $(2^n-1)\times(2^n-1)$ ploče sadrži 1 ili -1. Takav raspored bojeva nazivamo *uspješnim* ako je svaki broj jednak umnošku svojih susjeda (polja koja s tim poljem imaju zajedničku stranicu). Odredite broj uspješnih rasporeda brojeva.

18. (Iran 2006) Neka je $B \subseteq \mathbb{Z}_3^n$ sa svojstvom da za svaka dva različita elementa iz B, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, postoji $1 \leq i \leq n$ takav da je $a_i = b_i + 1$ (u $\mathbb{Z}_3$). Dokažite da je $|B| \leq 2^n$.