Kombinatorna geometrija

Uvod i osnovne ideje

U ovom predavanju obradit ćemo osnovne ideje iz kombinatorne geometrije, te se podsjetiti na razne metode koje se koriste u kombinatorici.

Za početak jedno zlatno pravilo – nemojte zaboraviti na *matematičku indukciju*. Indukciju možete koristiti u jako velikom broju zadataka, od laganih do teških (sjetite se 6. zadatka na IMO 2009).

Nakon toga prelazimo na tipične ideje koje koristimo u kombinatornoj geometriji:

- promatranje *konveksne ljuske*
- korištenje *principa ekstrema*
- korištenje *nejednakosti trokuta.*

Koristeći ove standardne ideje dokazat ćemo i dva manje poznata teorema, te ćemo vidjeti neke zadatke u kojima se ti teoremi mogu iskoristiti.

Teorem 1 (Hellyev teorem)**.** *Dano je konačno mnogo konveksnih područja u ravnini. Ako svaka tri područja imaju zajedničku točku, onda sva područja imaju zajedničku točku.*

Teorem 2 (Jungov teorem)**.** *Neka je u ravnini dano konačno mnogo točaka takvih da nikoje dvije nisu udaljene za više od* 1*. Tada se sve točke mogu pokriti krugom polumjera* $\frac{1}{\sqrt{3}}$*.*

Na kraju ćemo napraviti teže zadatke sa IMO shortlista, pri čemu ćemo koristiti *dvostruko prebrojavanje* i ideju *pridruživanja težina kombinatornim objektima.*

U zadacima za zadaću pronaći ćete i primjere u kojima se treba pronaći *invarijante* ili iskoristiti *Dirichletov princip.*

Zadaci

1. U ravnini je dano $3n$ točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da su te točke vrhovi $3n$ disjunktnih trokuta.

   Rješenje. Postoji smjer takav da svi paralelni pravci u tom smjeru prolaze kroz najviše jednu od danih točaka.

2. (Rusija 2000) Nekoliko papirnatih kvadrata istih dimenzija obojenih u n boja leže na pravokutnom stolu tako da su im stranice paralelne sa stranicama stolu. Među bilo kojih n kvadrata koji u parovima imaju različitu boju postoje dva koja možemo pribadačom pribosti za stol. Dokaži da postoji boja takva da sve kvadrate u toj boji možemo pribosti za stol s najviše $2n-2$ pribadača.

   Rješenje. Promotrimo papir čiji lijevi rub je lijevo od svih ostalih. Zlatno pravilo: nemojte zaboraviti na matematičku indukciju!

3. Dano je konačno mnogo točaka u ravnini tako da površina svakog trokuta kojem su vrhovi neke tri od danih točaka nije veća od 1. Dokažite da se sve točke može pokriti trokutom površine 4.

   Rješenje. Koristimo metodu kontradikcije. Promotrimo trokut maksimalne površine. Gdje se nalaze preostale točke? Sjetite se tipične geometrijske konfiguracije: trokut s povučenim srednjicama.

4. (Balkanijada 2010) U ravnini je dan konačan skup točaka raspoređenih tako da svaki trokut čiji su vrhovi u danom skupu možemo prekriti trakom širine 1. Dokaži da se cijeli skup može prekriti trakom širine 2.

   Rješenje. Kako primijeniti princip ekstrema? Promotrimo dužinu maksimalne duljine. Udaljenost ostalih točaka od pravca na kojem leži ta dužina može biti najviše 1.

5. Dokaži Hellyev teorem.

   Rješenje. Provedi dokaz matematičkom indukcijom po broju područja. U dokazu baze, $n = 4$, razlikujemo dva slučaja ovisno o tome je li konveksna ljuska trokut ili četverokut.

6. Dano je konačno mnogo točaka u ravnini tako da svake tri mogu biti pokrivene jediničnim krugom. Dokaži da sve točke mogu biti pokrivene jediničnim krugom.

   Rješenje. Promijeni perspektivu: točke A, B i C se nalaze unutar kruga polumjera 1 sa središtem O ako i samo ako je O u presjeku krugova polumjera 1 sa središtima A, B i C. Sada vidimo kako primijeniti Hellyev teorem.

7. Dokaži Jungov teorem.

   Rješenje. Zbog prethodnog zadatka, dovoljno je dokazati tvrdnju za 3 točke. To možemo razlikovanjem slučajeva određuju li te tri točke šiljastokutan trokut ili ne.

8. (Iran 2004) Neka je A konveksan skup. Dokažite da postoji točka O skupa A takva da za svake dvije točke X i X' na rubu skupa A za koje je O na pravcu XX' vrijedi
$$\frac{1}{2} \leq \frac{OX}{OX'} \leq 2.$$

   Rješenje. Za točku X na rubu skupa A neka je A_X slika skupa A pri homotetiji iz X s faktorom $\frac{2}{3}$. Na sve skupove A_X možemo primijeniti Hellyev teorem.

9. (SL 2008) Odredi najveći mogući n takav da postoje pravokutnici B_1, B_2, $\ldots$, B_n u ravnini stranica paralelnih koordinatnim ravninama tako da B_i i B_j imaju zajedničku točku ako i samo ako je $i \not\equiv j \pm 1 \pmod{n}$.

   Rješenje. Odgovor je 6. Neka su I_i i J_i projekcije pravokutnika B_i na x- i y-os redom. Tada je $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ ako i samo ako je $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ i $J_i \cap J_j \neq \emptyset$. Ovime lako svodimo tvrdnju na 1-dimenzionalni problem: ako su $I_1, I_2, \ldots, I_n$ segmenti na pravcu takvi da I_i i I_j imaju zajedničku točku ako i samo ako je $i \not\equiv j \pm 1 \pmod{n}$, onda najviše tri para $(i, i+1)$

zadovoljavaju $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$. Tu tvrdnju dokazujemo korištenjem principa ekstrema. Neka je $I_i = [a_i, b_i]$ i označimo $\alpha = max_i a_i$, $\beta = \min_i b_i$. Dovrši dokaz sam razlikovanjem slučajeva $\alpha \leq \beta$ i $\alpha > \beta$.

10. (USAMO 2015) Neka je n prirodan broj veći od 1. U ravnini je dano $2n$ točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne te je n točaka obojana plavo, a n crveno. Pravac zovemo *balansirajućim* ako prolazi kroz točno jednu plavu i jednu crvenu točku i u svakoj poluravnini određenoj tim pravcem je jednak broj plavih i crvenih točaka. Dokaži da postoje barem dva balansirajuća pravca.

    Rješenje. Pokazat ćemo da kroz svaki vrh konveksne ljuske prolazi jedan balansirajući pravac. Tvrdnja zadatka onda slijedi jer konveksna ljuska ima barem tri vrha, od kojih su barem dva iste boje. Neka je R jedna od tih točaka koja je vrh konveksne ljuske i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je crvena. Promotrimo pravac p koji sadrži točku R i jednu stranicu konveksne ljuske. Rotirajmo taj pravac i pri tome redom označimo s R_1, R_2, ... crvene točke, a B_1, B_2,... plave točke kako na njih nailazi rotirani pravac. Neka je b_i broj plavih, a r_i broj crvenih točaka koje se nalaze između pravaca p i RB_{i+1}. Vrijedi $b_i = i - 1$, te $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n \leq n - 1$. Ključno je promatrati razlike $d_i = r_i - b_i$ jer je $d_1 \geq 0$, $d_n \leq 0$ i $d_{i+1} - d_i \geq -1$. Dakle, niz d_i pada najviše za 1 pa mora poprimiti sve međuvrijednosti između d_1 i d_n. Iz toga slijedi da postoji i takav da je $d_i = 0$ i time dobivamo balansirajući pravac kroz R.

11. (SL 2000) U ravnini je dano n pravokutnika s paralelnim stranama. Strane različitih pravokutnika leže na različitim pravcima. Rubovi pravokutnika dijele ravninu na povezana područja. Područje je *divno* ako mu je barem jedan vrh danih pravokutnika na rubu. Dokaži da je suma brojeva vrhova svih divnih područja manja od $40n$.

12. (SL 2012) Na kružnici je dano 2^{500} točaka s oznakama $1, 2, \ldots, 2^{500}$ u nekom poretku. Dokaži da je moguće odabrati 100 u parovima disjunktnih tetiva koje spajaju neke od danih točaka tako da je svih 100 zbrojeva oznaka na krajevima tih tetiva jednako.

Zadaci za samostalan rad

1. Mnogokut od papira dozvoljeno je razrezati ga duž nekog pravca, te za točke A i B u kojima pravac siječe mnogokuta zalijepiti dobivena dva dijela zalijepiti duž dužine $\overline{AB}$ tako da se kopija točke A u jednom dijelu zalijepi na kopiju točke B u drugom dijelu. Možemo li u konačno mnogo dozvoljenih operacija od kvadrata površine 1 dobiti trokut površine 1?

2. U ravnini je dano 13 točaka $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$ koje su povezane dužinama $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{13}P_1}$. Postoji li pravac koji siječe svaku od tih dužina u nekoj unutarnjoj točki?

3. U ravnini je povučeno konačno mnogo pravaca tako da nikoja tri pravca ne prolaze kroz istu točku. Dokaži da je povezana područja ravnine određena tim pravcima moguće obojati u dvije boje tako da nikoja dva susjedna područja nemaju istu boju.

4. (HMO 2010) Dan je pravokutni trokut i konačan skup točaka u njemu. Dokaži da se ove točke mogu povezati izlomljenom linijom (ne nužno zatvorenom) tako da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije manja ili jednaka kvadratu duljine hipotenuze danog trokuta.

5. (Sylvesterov problem) U ravnini je dano konačno mnogo nekolimnearnih točaka. Dokaži da postoji pravac koji sadrži točno dvije od zadanih točaka.

6. U ravnini je $2n+1$ gangstera koji se svi nalaze na različitim udaljenostima. Svatko puca u najbližeg. Dokaži da

   i) barem jedan preživi.
   ii) nitko nije pogođen s više od 5 metaka.
   iii) putevi metaka se ne križaju.
   iv) skup dužina kojeg formiraju putevi metaka ne sadrži zatvoren poligon.

7. U ravnini je 10 gangstera koji se svi nalaze na različitim udaljenostima. Svatko puca u najbližeg. Koliko najmanje gangstera će biti pogođeno?

8. Dokaži da svaki konveksan poligon površine 1 možemo pokriti pravokutnikom površine 2.

9. Neka je $n \geq 5$ prirodan broj. Odredi najveći mogući prirodan broj k za koji postoji mnogokut (ne nužno konveksan, bez samopresijecajućeg ruba) s n vrhova kojemu je točno k unutarnjih kuteva pravo.

10. (MEMO 2013) Promotrite konačno mnogo točaka u ravnini takvih da nikoje tri točke ne leže na jednom pravcu. Svaku od tih točaka možemo obojati crvenom ili zelenom bojom tako da svaki trokut kojem su vrhovi iste boje u svojoj unutrašnjosti sadrži barem jednu točku druge boje.

    Koji je najveći mogući broj takvih točaka?

11. (IMO 2013) Konfiguraciju od 4027 točaka u ravnini zovemo *kolumbijskom* ako se sastoji od 2013 crvenih i 2014 plavih točaka, pri čemu nikoje tri točke iz konfiguracije nisu kolinearne. Povlačenjem pravaca ravnina se dijeli na nekoliko dijelova. Kažemo da je raspored pravaca *dobar* za kolumbijsku konfiguraciju ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

    - nijedan od pravaca ne prolazi nijednom točkom konfiguracije;
    - nijedan od dijelova ne sadrži točke obiju boja.

    Nađi najmanji broj k takav da za svaku kolumbijsku konfiguraciju od 4027 točaka postoji dobar raspored k pravaca.

12. U konveksnom četverokutu $ABCD$ duljina svake stranice manja je od 63. Dokaži da za proizvoljnu točku S unutar tog četverokuta barem jedna od dužina $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$ ima duljinu manju od $\sqrt{2001}$.

13. Unutar kvadrata stranice duljine 1 nalazi se mnogokut opsega 100. Dokaži da postoji pravac koji siječe barem 50 stranica tog mnogokuta.

14. Konveksni n-terokut smješten je u kvadrat sa stranicom duljine 1. Dokaži da postoje tri vrha A, B i C tog n-terokuta, takva da površina trokuta ABC nije veća od $\frac{8}{n^2}$.

15. (Državno 2003) Dano je 8 kockica čije strane su obojane tako da je točno 24 strana crveno, a 24 plavo. Dokaži da se od tih kockica može složiti $2 \times 2 \times 2$ kocka kojoj se na oplošju nalazi jednak broj plavih i crvenih kvadrata 1×1.

16. Dano je $2n + 3$ točaka u ravnini tako da se nikoje tri ne nalaze na istom pravcu i nikoje četiri na istoj kružnici. Dokaži da postoji kružnica koja prolazi kroz neke tri od zadanih točaka i unutar koje se nalazi točno n zadanih točaka.

17. (IMO 2011) Neka je S konačan skup točaka u ravnini ($|S| \geq 2$) pri čemu nikoje tri točke nisu kolinearne. Opisat ćemo postupak koji nazivamo *vjetrenjača*. Na početku je odbran pravac l koji prolazi kroz točku $P \in S$. Rotiramo pravac l oko pivota P u smjeru kazaljke na satu sve dok taj pravac ne sadrži neku drugu točku Q skupa S. Tada Q postaje novi pivot. Postupak se ponavlja unedogled, pri čemu je pivot uvijek neka točka iz S. Dokaži da postojji točka P i pravac l koji sadrži točku P takvi da vjetrenjača ima svaku točku skupa S kao pivot beskonačno puta.

18. (IMO 2006) Svakoj stranici b konveksnog mnogokuta P pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u P. Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama mnogokuta P veći ili jednak od dvostruke površine mnogokuta P.

19. Neka su $C_1, ..., C_n$ kružnice radijusa 1 takve da se nikoje dvije ne diraju (samo u jednoj točki) i da je dio ravnine sadržan unutar tih kružnica povezan. Dokažite da je $|S| \geq n$ pri čemu je

$$S = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_i \cap C_j,$$

skup svih presjeka danih kružnica.

20. (IMO 2002) Neka su C_1, C_2, ..., C_n kružnice polumjera 1 u ravnini, pri čemu je $n \geq 3$. Označimo njihova središta redom s $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Pretpostavimo da nijedan pravac nema zajedničkih točaka s više od dvije promatrane kružnice. Dokažite nejednakost

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Dodatni izvori zadataka

- Alexander Remorov, Russian-style Problems – Combinatorial Geometry (http://www.mit.edu/ alexrem/MiscellaneousProblems.pdf)
- Viktor Prasolov, Problems in plane and solid geometry
- IMO Shortlist