IMO pripreme 2015. Mislav Balunović, 4. 6. 2015.

Algoritamsko rješavanje zadataka

Identity swap

- Pojednostavljivanje problema tako da objekti koji se susretnu umjesto da se odbiju na neki čudan način jednostavno zamjene identitet
- Bitno je osigurati da je početni problem ekvivalentan sa našim modificiranim problemom u kojem se objekti drukčije gibaju!

Primjer. Na žici jedinične dužine nalazi se n mravi. Svaki je okrenut na neku od strana i svi se mravi kreću jednakom brzinom. Kad se mrav sudari sa drugim mravom, oba promjene smjer. Također, kad mrav udari u rub žice, promjeni smjer. Koja je najmanja udaljenost koju svi mravi moraju proći tako da se nakon te udaljenosti svi mravi u bilo kojoj početnoj konfiguraciji (za bilo koji n) vrate u početni položaj?

1. Zadana je m sa m ploča gdje se na nekim poljima nalaze mravi. U trenutku 0 svi mravi se počinju kretati brzinom 1 u jednom od 4 smjera paralelna sa rubom. Kad se susretnu 2 mrava, svaki se okrene za 90 stupnjeva u smjeru kazaljke na satu. Ako se susretnu 3 ili više mrava ništa se ne dogodi. Kada mrav dođe do kraja ploče padne sa nje. Koje je najduže moguće vrijeme koliko treba proteći dok zadnji mrav padne s ploče? Moraju li uvijek svi pasti? (IMO Shortlist 2011 C5)
2. Na biljarskom stolu koji je u obliku kvadrata N x N nalazi se kuglica. Kuglica za biljar se odbija od ruba stola pod istim kutem pod kojim je ušla. Udarili smo kuglicu i onda se odbila pod kutem α od ruba stola. Za koje sve α će se kuglica vratiti u početni položaj u nekom trenutku?

Pohlepni algoritam

Primjer. Je li moguće izabrati 1983 različitih prirodnih brojeva manjih od 100000 takvih da nikoja 3 nisu u aritmetičkom nizu?

Skica rješenja: Krenimo od skupa $1, 2$. Skupu ne možemo dodati 3 jer su $1, 2, 3$ aritmetički niz. Sljedeći koji možemo dodati je 4 pa imamo $1, 2, 4$. Također možemo dodati i 5, ali ne možemo 6 jer dobijemo niz $2, 4, 6$. Ponavljanjem ovog algoritma dolazimo npr. do $1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29$. Preostaje dokazati da kad bi ponavljali ovaj postupak do 100000 da bi uspjeli ubaciti barem 1983 brojeva u skup. Ovo je pohlepan algoritam jer ne gledamo u "budućnost". Ne zanima nas isplati li se možda preskočiti neki broj koji možemo ubaciti kako bi kasnije mogli eventualno ubaciti više brojeva. Greedy uvijek gleda samo jedan korak unaprijed.

Grafovi

1. Zadan je usmjereni graf bez ciklusa u kojem ne postoji put sa više od 99 bridova. Dokaži da je moguće obojati bridove grafa u 2 boje tako da ne postoji jednobojni put sa 9 ili više bridova.
2. Neka je A matrica sa vrijednostima $0, 1, -1$ tako da svaki redak i svaki stupac sadrže točno jednom 1 i -1. Je li moguće konačnim brojem zamjena redaka ili stupaca dobiti matricu $-A$? (Bugarska TST 2006)

Razno

Primjer. IMO 2010 zadatak 5

1. Dokaži da postoji permutacija svih binarnih riječi duljine n tako da se dvije susjedne riječi razlikuju u točno jednom bitu. (Gray code)
2. Poljima 8x8 matrice pridruženi su brojevi 1 do 32, svaki broj se pojavljuje dva puta. Dokaži da je moguće izabrati 32 polja tako da se u svakom nalazi različiti broj te da se u svakom retku i stupcu nalazi barem jedno odabrano polje. (Turnir gradova 1986)
3. 11 razbojnika posjeduju škrinju s blagom. Koji je najmanji broj lokota koji mogu postaviti na škrinju tako da postoji podjela ključeva tako da nikojih 5 ne mogu otvoriti sve lokote, a svakih 6 može otvoriti sve lokote. Razbojnici će napraviti dovoljno duplikata ključeva.

Procesi

1. Svaki od n identičnih vrčeva je ispunjen do $\frac{n-1}{n}$ svog volumena sa bojom. Dozvoljeno je preliti bilo koju količinu iz jednog vrča u drugi. Je li moguće na kraju procesa dobiti istu smjesu boja u svim vrčevima?
2. Postoji 1000 vrčeva sa džemom gdje svaki sadrži najviše $\frac{1}{100}$ ukupne količine džema. Svaki dan treba odabrati 100 vrčeva te iz njih pojesti istu količinu džema. Dokaži da je moguće pojesti sav džem u konačnom broju dana.

Kombinatorna geometrija

Primjer. Konfiguraciju od 4027 toččaka u ravnini zovemo kolumbijskom ako se sastoji od 2013 crvenih i 2014 plavih toččaka, pri čemu nikoje tri točke iz konfiguracije nisu kolinearne. Povlačenjem pravaca ravnina se dijeli na nekoliko dijelova. Kažzemo da je raspored pravaca dobar za kolumbijsku konfiguraciju ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:
• nijedan od pravaca ne prolazi nijednom točkom konfiguracije;
• nijedan od dijelova ne sadrži točke obiju boja.
Nađi najmanji broj k takav da za svaku kolumbijsku konfiguraciju od 4027 točaka postoji dobar raspored k pravaca.

Primjer. IMO 2011 - vjetrenjače

1. U ravnini leži n pravaca u općem položaju. Dokaži da postoji izlomljena linija A_0, A_1, ..., A_N takva da se svaki pravac sadrži točno jednu dužinu sa izlomljene linije.

2. Zadan je konačan broj kvadrata čija je ukupna površina Dokaži da ih je moguće posložiti tako da prekrivaju kvadrat površine 1.

3. U ravnini se nalazi $3n - 1$ točaka, ne postoje 3 kolinearne. Dokaži da je moguće odabrati $2n$ točaka tako da im konveksna ljuska nije trokut.

4. Dokaži da je bilo kojih n točaka u ravnini moguće prekriti konačnim brojem krugova čiji je zbroj promjera manji od n i udaljenost bilo koja dva kruga je veća od 1.

Teorija igara

Primjer. (IMO Shortlist 2009 C5) 5 identičnih praznih kanta sa kapacitetom 2 litre stoji u vrhovima peterokuta. Na početku prvi igrač uzme litru vode iz obližnje rijeke i rasporedi ih po kantama. Nakon toga drugi igrač isprazni dvije susjedne kante. Igra se nastavlja. Može li prvi igrač natjerati da se neka kanta prelije?

Funkcionira li pohlepni algoritam (drugi igrač uvijek isprazni dvije susjedne kante sa najvećim zbrojem)?

1. (Turnir gradova 1981) Igra se igra u koordinatnoj ravnini. Figure su 1 vuk i 50 ovaca. Prvi igrač pomiče vuka, drugi igrač pomiče jednu od ovaca, i tako u krug. Vuk i ovca se mogu pomaknuti u bilo kojem smjeru, ali najviše 1 metar po potezu. Može li vuk za svaku konfiguraciju ovaca uhvatiti barem jednu ovcu?