Polinomi i nizovi

Polinomi

Definicija 1. *Kažemo da je P polinom stupnja $n \in \mathbb{N}$ ako postoje realni brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takvi da je $a_n \neq 0$ i $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ su koeficijenti polinoma P, s tim da je a_0 slobodni, a a_n vodeći koeficijent.*

Definicija 2. *Kažemo da je x_0 nultočka polinoma P ako je $P(x_0) = 0$.*

Teorem 1. *Polinom stupnja n ima točno n kompleksih nultočaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nužno različitih) i vrijedi $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.*

Teorem 2. *Za polinome P i Q postoje jedinstveni polinomi R i r takvi da je stupanj od r strogo manji od stupnja od Q i vrijedi $P(x) = R(x)Q(x) + r(x)$.*

Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. Vrijedi:

- Vieteove formule

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

- Ako su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli brojevi, tada $(a-b)|(P(a)-P(b))$, za sve $a, b \in \mathbb{Z}$.
- (Eisensteinov kriterij ireducibilnosti) Ako je P polinom s cijelobrojnim koeficijentima i neka postoji prost broj p t.d. $p \nmid a_n, p|a_k$, za svaki $k < n$, te $p^2 \nmid a_0$. Tada se P ne može na netrivijalan način prikazati kao umnožak 2 polinoma s cijelobrojnim koeficijentima
- Ako je $P(y_i) = c$, gdje su $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ različiti realni brojevi i c proizvoljna konstanta, tada je $P(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$

Zadaci:

Zadatak 1. *Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ za koji postoje polinomi stupnja n čiji su svi koeficijenti ± 1 i sve nultočke realne.*

Zadatak 2. *Dokaži da za bilo koje različite realne brojeve $x_1, x_2 \dots, x_n$ polinom*

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) - 1$$

ne može prikazati kao umnožak 2 polinoma s cijelobrojnim koeficijentima.

Zadatak 3. *Dakaži da se za svaki $n \in \mathbb{N}$ polinom $P(x) = x^{2^n} + 1$ ne može prikazati kao umnožak 2 polinoma s cijelobrojnim koeficijentima.*

Zadatak 4. *Nađi najmanji $n \in \mathbb{N}$ za koji postoje polinomi $p_1, p_2, \dots, p_n$ s racionalnim koeficijentima takvi da je*

$$x^2 + 7 = p_1^2(x) + p_2^2(x) + \dots + p_n^2(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nizovi

Niz $(a_n)_n$ je funkcija $a : \mathbb{N} \to S$ (S može biti $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$), koristimo oznaku $a(i) = a_i$, pa niz zapisujemo $a_1, a_2, \dots$.

Primjeri nizova

- Aritmetički niz

  Vrijedi $a_n = a_1 + (n-1)d, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je d konstanta.

  $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$
- Goemetrijski niz

  Vrijedi $a_n = q^{n-1}a_1, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je $q \neq 1$ konstanta.

  $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \frac{1-q^n}{1-q}$
- Rekurzivno zadani niz (Fibonaccijevi brojevi)

  Početni uvjeti: $a_1 = a_2 = 1$ Rekurzija: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Zadaci:

Zadatak 5. *Za aritmetički niz $(a_n)_n$ vrijedi $\frac{S_k}{S_l} = \frac{k^2}{l^2}$. Koliko je $\frac{a_k}{a_l}$?*

Zadatak 6. *Niz $(a_n)_n$ je zadan rekurzivno $a_1 = 2$,*

$$a_{n+1} = 3a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odredi formulu za $\sum_{i=0}^{n} a_i$.

Zadatak 7. *Niz $(a_n)_n$ je zadan rekurzivno $a_1 = 1$,*

$$a_{n+1} = 5a_n + 4n^2 + 2n + 6, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odredi opću formulu za a_n.

Zadatak 8. *Niz $(a_n)_n$ je zadan rekurzivno $a_1 = 2$,*

$$a_{n+1} = 2a_n + 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaži $a_n < 2^{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 9. *MEMO 2008., link `http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h225451p1251775`*