Nejednakosti

Uvod

Cilj je ovog predavanja upoznati natjecatelje s poznatim nejednakostima i pokazati primjenu istih na natjecateljskim zadacima. Napisat ćemo najprije neke od najpoznatijih nejednakosti koje ćemo koristiti u dokazima.

Teorem 1 (Nejednakosti sredina). *Neka su $a_1, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Definirajmo za svaki realan broj k:*

$$S_k(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k \cdots + a_n^k}{n}} \quad za \quad k \neq 0 \quad i \quad S_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Tada za $m < n$ vrijedi $S_m \leq S_n$. Uz jednakost kad je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Teorem 2 (Cauchy-Schwarzova nejednakost). *Neka su $a_1, \dots, a_n$ i $b_1, \dots, b_n$ realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Uz jednakost kad je $a_1 : a_2 : \dots a_n = b_1 : b_2 : \dots b_n$.

Teorem 3 (Hölderova nejednakost). *Neka su $a_{i,j}$ $i = 1, 2 \dots, m$, $j = 1, 2 \dots, n$ pozitivni realni brojevi i $p_1, \dots p_m > 1$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$. Tada vrijedi:*

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}} \geq \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j}$$

Teorem 4 (Jensenova nejednakost). *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, $x_1, \dots x_n$ i $a_1, \dots, a_n > 0$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right)$$

Za f konkavnu funkciju, smjer nejednakosti je suprotan

Teorem 5 (Monotono preuređenje vektora). *Neka su $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ realni brojevi i neka je $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ permutacija. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$$

Teorem 6 (Čebiševljeva nejednakost)**.** *Neka su* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *i* $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ *realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \geq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$$

Teorem 7 (Schurova nejdnakost)**.** *Neka su* a, b, c *realni brojevi i* $r > 0$*. Tada vrijedi:*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Dokaze ovih teorema lako je naći na internetu tako da ovdje nisu navedeni. Radi kraćeg i preglednijeg zapisa, u daljnjem će tekstu znakovi $\sum$ i $\prod$ bez indeksa označavati cikličku sumaciju odnosno ciklični produkt.

Riješeni zadaci

1. Neka su $a, b, c, d > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$4(ab + bc + cd + da) \leq (a + b + c + d)^2$$

   Rješenje. Iz AG nejednakosti vrijedi:

$$4(ab + bc + cd + da) = 4(a + c)(b + d) \leq (a + b + c + d)^2$$

   Jednakost vrijedi za $a + c = b + d$. ■

2. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

   Rješenje. Koristeći AG nejednakost, vrijedi:

$$\sum \frac{a}{1+b^2} = \sum \left(a - \frac{ab^2}{1+b^2}\right) \geq \sum \left(a - \frac{ab^2}{2b}\right) = 3 - \frac{1}{2}\sum ab$$

   Ostaje za dokazati samo da je $ab + ac + bc \leq 3$, međutim, to trivijalno slijedi iz činjenice da je $(a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc) = \sum(a - b)^2 \geq 0$. ■

3. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq 1$$

   Rješenje. Iz Holderove nejednakosti vrijedi:

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2 \sum a(a+2b) \geq (a+b+c)^3$$

   Međutim, $\sum a(a + 2b) = (a + b + c)^2 = 1$ pa je time nejednakost dokazana. ■

4. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti, smijemo pretpostaviti da je b srednji od brojeva a, b, c (Zašto?). Tada očito vrijedi $(b - a)(b - c) \leq 0$, tj $b^2 + ac \leq b(a + c)$. Koristeći to u nejednakosti vidimo da vrijedi:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc =\leq a^2b + 2abc + bc^2 = b(a + c)^2$$

Nadalje, iz AG nejednakosti na tri člana vrijedi:

$$b(a + c)^2 = 4b\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 \leq 4\left(\frac{b + 2 \cdot \frac{a+c}{2}}{3}\right)^3 = 4$$

Jednakost vrijedi za $a = b = c = 1$ te $a = 2, b = 1, c = 0$ i cikličke permutacije. ■

5. Neka su $a, b, c, d > 0$ realni brojevi, takvi da je $abcd = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{(1 + a)^2} + \frac{1}{(1 + b)^2} + \frac{1}{(1 + c)^2} + \frac{1}{(1 + d)^2} \geq 1$$

Prvo rješenje. Dokažimo najprije sljedeću korisnu lemu za $x, y > 0$:

$$\frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{1}{(1 + y)^2} \geq \frac{1}{1 + xy}$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti vrijedi:

$$\frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{1}{(1 + y)^2} \geq \frac{1}{(1 + xy)(1 + \frac{x}{y})} + \frac{1}{(1 + xy)(1 + \frac{y}{x})} = \frac{1}{1 + xy}$$

Primjenjujući navedenu lemu na zadatak, vidimo da vrijedi:

$$\sum \frac{1}{(1 + a)^2} \geq \frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + cd} = \frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + \frac{1}{ab}} = 1$$

Čime smo dokazali nejednakost. ■

Drugo rješenje. Napravimo simetričnu supstituciju: $a = \frac{yzw}{x^3}$, $b = \frac{xzw}{y^3}$, $c = \frac{xyw}{z^3}$, $a = \frac{xyz}{w^3}$. Nejednakost tada postaje:

$$\sum \frac{x^6}{(x^3 + yzw)^2} \geq 1$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti vrijedi:

$$\sum \frac{x^6}{(x^3 + yzw)^2} \geq \frac{(\sum x^3)^2}{\sum(x^3 + yzw)^2}$$

Ostaje za dokazati da vrijedi:

$$(x^2+y^2+z^2+w^2)^2 \geq \sum (x^3+yzw)^2$$

Što je, nakon raspisivanja, ekvivalentno s:

$$2\sum_{sym} x^3y^3 \geq \; 2\sum x^3yzw + \sum (xyz)^2$$

Međutim, iz AG nejdnakosti znamo da vrijedi:

$$\frac{2}{3}\sum (x^3y^3+x^3z^3+x^3w^3) \geq \sum x^2yzw \quad \text{i} \quad \frac{2}{3}\sum (x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3) \geq \sum (xyz)^2$$

Odakle zbrajanjem slijedi tražena nejednakost. ■

6. Neka su $a_1, \ldots, a_n > 0$ realni brojevi, takvi da je $a_1 \cdots a_n = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+a_i^2} \leq \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Rješenje. Iz Cauchy-Schwarzove ili Jensenove nejednakosti jer je $\sqrt{x}$ konkavna funkcija vrijedi:

$$\sqrt{1+x^4} + \sqrt{2}x \leq \sqrt{2(1+x^4+2x^2)} \quad \text{odnosno} \quad \sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{2}(x^2-x+1)$$

Dakle, primjenjujući dokazano na zadanu nejednakost, a dobivamo da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+a_i^2} \leq \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \sqrt{a_i}+1) = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} a_i + \sqrt{2}\left(n - \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right) \leq \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Gdje posljednja nejednakost slijedi iz AG nejednakosti: $\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i} \geq n\sqrt[2n]{a_1\cdots a_n} = 1$. ■

*Napomena: Prethodnu nejednakost može dokazati i nalazeći pogodnu konstantu C takvu da vrijedi $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}x + C\ln x$. U ovom slučaju za $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ vrijedit će nejednakost.

7. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Rješenje. Iz Cauchy-Schwarzove nejednakost vrijedi:

$$\left(\sum\sqrt{\frac{2a}{a+b}}\right)^2 \leq \sum\frac{2a}{(a+b)(a+c)}\sum(a+c) = \frac{8(ab+ac+bc)(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

Dakle, ostaje za dokazati da je

$$8(ab+ac+bc)(a+b+c) \leq 9(a+b)(a+c)(b+c)$$

što je poznata nejednakost, a slijedi iz:

$$9(a+b)(a+c)(b+c) - 8(ab+ac+bc)(a+b+c) = \sum c(a-b)^2 \geq 0$$

Jednakost vrijedi za $a=b=c$. ■

8. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{9+16a^2} + \sqrt{9+16b^2} + \sqrt{9+16c^2} \geq 3 + 4(a+b+c)$$

Rješenje. Ovaj zadatak riješit ćemo jednom vrlo jakom, nestandardnom i korisnom metodom - **Metodom kontradikcije**.

Pretpostavimo da je $\sum \left(\sqrt{9+16a^2} - 4a\right) < 3$. Tada, zbog

$$\sqrt{9+16a^2} - 4a = \frac{9}{\sqrt{9+16a^2}+4a} \quad \text{postoji} \quad t < 1 \quad \text{takav da je} \sum \sqrt{9+16(ta)^2} - 4(at) = 3$$

Stavimo sada: $x = \sqrt{9+16(at)^2} - 4(at)$, $y = \sqrt{9+16(bt)^2} - 4(bt)$, $z = \sqrt{9+16(ct)^2} - 4(ct)$.

Tada vrijedi $x+y+z = 3$ i $at = \frac{9-x^2}{8x}$ i analogna relacija za y i z. Međutim, tada iz uvjeta i postojanja $t < 1$ vrijedi:

$$1 > t^3abc = \frac{(9-x^2)(9-y^2)(9-z^2)}{8^3xyz}$$

Cilj nam je sada dokazati da je zadnja nejednakost neistinita, tj. da uz uvjet $x+y+z=3$ vrijedi:

$$\frac{(9-x^2)(9-y^2)(9-z^2)}{8^3xyz} \geq 1$$

To je nakon raspisa razlike kvadrata u brojniku ekvivalentno s:

$$\frac{3^3(x+y)(x+z)(y+z)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}{8^3(x+y+z)^3xyz} \geq 1$$

Međutim, ova nejednakost slijedi iz AG-a primjenjenog na način:

$$\prod(2x+y+z) = \prod(x+y+x+z) \geq 8(x+y)(x+z)(y+Z)$$

i prethodno dokazanih nejdnakosti:

$$(x+y)(x+z)(y+z) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+xz+yz) \quad \text{i} \quad (xy+xz+yz)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

Dakle, dobili smo kontradikciju s pretpostavkom i time dokazali nejednakost. ■

Zadaci za vježbu:

1. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi, takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{3}{2}$$

2. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\left(\frac{2a}{b + c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{a + c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a + b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3$$

3. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

4. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi, takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Dokažite:

$$\frac{1}{5 - a} + \frac{1}{5 - b} + \frac{1}{5 - c} + \frac{1}{5 - d} \leq 1$$

5. Neka su $a, b, c > 1$ realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} + \frac{1}{c^2 - 1} = 1$$

   Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} \leq 1$$

6. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite:

$$a\sqrt{1 + b^3} + b\sqrt{1 + c^3} + c\sqrt{1 + a^3} \leq 5$$

7. Neka su $a, b, c > 0$ pozitivni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da je:

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$$

8. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{b^3}{\sqrt{a^2 - ac + c^2}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

9. Neka su $x_1, \ldots, x_n > 0$ realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{1 + x_1} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n} = 1$$

   Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \geq (n - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$$