Funkcijske jednadžbe

Uvod i osnovne ideje

U ovom predavanju obradit ćemo neke poznate funkcijske jednadžbe i osnovne ideje rješavanja takvih jednadžbi.

Uobičajeno je početi sa Cauchyjevom jednadžbom: naći sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{za svaki } x, y \in \mathbb{R}.$$

Intuicija nam kaže da bi jedina rješenja gornjeg problema trebala biti linearne funkcije oblika $f(x) = cx$, no vidjet ćemo da su za to potrebni i neki dodatni uvjeti.

Najprije primjetimo da ako uvrstimo $y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$. Zatim se jednostavno može indukcijom pokazati da vrijedi $f(nx) = nf(x)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in \mathbb{R}$. Lako vidimo $mf(nx/m) = f(nx) = nf(x)$, pa je $f(qx) = qf(x)$, za svaki $q \in \mathbb{Q}, q > 0$. Uvrštavanjem x i $-x$ dobivamo da je f neparna, dakle imamo $f(qx) = qf(x)$, za svaki $q \in \mathbb{Q}$. Dakle, ako stavimo $f(1) = c$ i $x = 1$ dobili smo da se f podudara na $\mathbb{Q}$ s očekivanim rješenjima. No, uz zadane pretpostavke ovo nikako ne možemo proširiti na $\mathbb{R}$.

Ako je zadan bilo koji od sljedećih uvjeta, tada su sva rješenja Cauchyjeve jednadžbe oblika $f(x) = cx$.

- f je neprekidna
- f je ograničena odozgo (ili odozdo) na nekom intervalu
- f je monotona na nekom intervalu

U slučaju da nije zadan niti jedan dodatni uvjet, eksplicitna konstrukcija rješenja različitog od cx nije moguća. Da bismo ilustrirali otprilike kako izgledaju, promatrajmo sve realne brojeve oblika $p + q\sqrt{2}$, $p, q \in \mathbb{Q}$. Označimo skup svih takvih brojeva s $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Primjetimo da je $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ zatvoren na zbrajanje i svaki element ima jedinstven zapis u obliku $p + q\sqrt{2}$. Zato možemo definirati

$$f(p + q\sqrt{2}) = ap + bq,$$

za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Lako se provjeri da f zadovoljava Cauchyjevu jednadžbu, i da ako $b/a \neq \sqrt{2}$, f nije restrikcija linearne funkcije. Funkciju f je moguće proširiti na cijeli $\mathbb{R}$ tako da i dalje zadovoljava Cauchyjevu jednadžbu koristeći Hamelovu bazu. (Hamel je pokazao da postoji skup $S \subseteq \mathbb{R}$ (beskonačan) takav da se svaki $x \in \mathbb{R}$ može na jedinstven nažin napisati kao konačna linearna kombinacija elemenata iz S, tj. postoje $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ i $s_1, \ldots, s_n \in S$ takvi da je $x = x_1 s_1 + \cdots + x_n s_n$).

Sada ćemo navesti osnovne korake rješavanja funkcijskih jednadžbi:

- *pogađanje rješenja*: sjetite se poznatih formula za elementarne funkcije (linearne, trigonometrijske, eksponencijalne, itd.), pokušajte uvrstiti polinom nekog stupnja pa tražiti koeficijente
- pokušajte naći vrijednosti u nekim točkama, najčešće $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$
- svođenje na Cauchyjevu jednadžbu
- ispitajte injektivnost, surjektivnost, (parnost, neparnost, periodičnost)
- indukcija (kao u Cauchyjevoj jednadžbi)
- naći moguće nultočke
- uvrštavanje različitih funkcija umjesto x i y, po mogućnosti da se nešto pokrati ili da neki argumenti postanu jednaki (ovo je najvažniji i najkompliciraniji korak, ponekad je vrlo teško pogoditi što uvrstiti)

Zadaci

1. Nađite sve monotone funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$
2. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ za koje vrijede sljedeća dva uvjeta:
   (i) $f(n)f(-n) = f(n^2)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$,
   (ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}$.
3. Nađite sve monotone funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da je
$$f(x)f(y) = f(x+y)(f(x) + f(y)).$$
4. (USAMO, 2015) Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ za koje vrijedi
$$f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$$
za sve $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ takve da $x < y < z < t$ čine aritmetički niz.
Rješenje. Pokažite
$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f(\frac{x+y}{2}), \forall x, y \in \mathbb{Q}$$
pa svedite na Cauchyjevu jednadžbu.
5. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ za koje vrijedi
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),$$
za sve $x, y \in \mathbb{Q}$.
Rješenje. Očito je $f(0) = 0$. Indukcijom pokažite $f(nx) = n^2 f(x)$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da je f parna. Dalje kao u Cauchyjevoj jednadžbi.

6. (Makedonija, 2011) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y).$$

Rješenje. Pretpostavimo da je f tražena funkcija i da je $f(a) = 0$. Ako uvrstimo (a, y) u jednadžbu dobivamo $0 = af(y)$, pa ako $f \neq 0$ jedina moguća nultočka je u $x = 0$. Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \neq x$ (tada mora biti $f(x) \neq 0$). Stavimo $y = (f(x) - x)/f(x) \neq 0$ i uvrstimo (x, y) u jednadžbu. Dobivamo $f(f(x)) = f(f(x)) + xf(y)$. Tada je $xf(y) = 0$, pa je $x = 0$. Slijedi $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Sada lako slijedi $f(0) = 0$.

7. (Srbija, 2014) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi
$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy.$$

Rješenje. Uvrstimo $x = y$, dobivamo $f(x^2) = x^2$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pokažite da je $f(x) = cx$ za $x < 0$. Zatim pokažite da je $c = -1$.

8. (Koreja, 2014) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi
$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Uvrstimo $x = 0$, dobivamo
$$f(f(0)f(y) + y - 1) = f(0) + y - 1,$$
dakle f je surjekcija. Uvrstimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = 0$, slijedi
$$f(y - 1) = f(xy) + y - 1.$$
Ako stavimo $y = 1$ dobivamo $f(0) = 0$, pa je $f(y - 1) = y - 1$, za svaki $y \in \mathbb{R}$.

9. (Maroko, 2011) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)).$$

Rješenje. Trivijalno rješenje je $f = 0$. Neka je $f \neq 0$. Pretpostavimo da je $f(x) = 0$. Tada uvrstavanjem tog x i proizvoljnog $y \in \mathbb{R}$ dobivamo $(x - 2)f(y) + f(y) = 0$, pa slijedi $x = 1$. To znači da je jedina moguća nultočka od f u točki $x = 1$. Primjetimo da $f = 1$ nije rješenje. Uzmimo $x \neq 2$ takav da $f(x) \neq 1$, i $y \in \mathbb{R}$ takav da $y + 2f(x) = x + yf(x)$. Tada imamo $(x - 2)f(y) = 0$, pa slijedi $f(y) = 0$. Zbog dokazanog slijedi $y = 1$, pa imamo $1 + 2f(x) = x + f(x)$, to jest $f(x) = x - 1$. Dokazano je $x \neq 2$ i $f(x) \neq 1$ povlači $f(x) = x - 1$. Pretpostavimo $f(2) \neq 1$. Tada $2f(2) \neq 2$, pa je ili $f(2f(2)) = 1$ ili $f(2f(2)) = 2f(2) - 1$. No uvrštavanjem $(2, 0)$ u početnu jednadžbu dobivamo $f(2f(2)) = f(2)$. Sada slijedi $f(2) = 1$. Pretpostavimo $f(x) = 1$. Uvrstimo $(x, 0)$ u početnu jednadžbu, dobivamo $(x - 2)f(0) + f(2) = 1$, pa zbog $f(0) \neq 0$ slijedi $x = 2$. Slijedi $f(x) = x - 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

10. (Kazahstan, 2012) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi

$$f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da je f neparna.

Rješenje. Očito je dovoljno dokazati $f(-1) = -1$. Pretpostavimo $f(x) = f(y)$. Uzmimo z takav da $f(z) \neq 0$. Tada imamo $xf(z) = f(zf(x)) = f(zf(y)) = yf(z)$, pa je $x = y$, tj. f je injekcija. Uvrštavanjem $(1, y)$ dobivamo $f(f(y)) = yf(1)$. Posebno $f(f(1)) = f(1)$, pa je zbog injektivnosti $f(1) = 1$. Sada imamo $f(f(x)f(y)) = yf(f(x)) = yx = f(f(yx)$, pa je zbog injektivnosti $f(x)f(y) = xy$. Dobivamo $f(-1)^2 = 1$, a kako ne može biti $f(-1) = 1$, slijedi $f(-1) = -1$.

11. (Iran, 1997) Nađite sve strogo rastuće funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(1-x) = 1 - f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Uvrstimo $1 - f(x)$ umjesto x. Zbog injektivnosti od f dobivamo $1 - x = f(1 - f(x)) = 1 - f(f(f(x)))$. Ako pretpostavimo $f(x) > x$ za neki $x \in \mathbb{R}$ zbog stroge rastućosti lako dobivamo kontradikciju. Isto tako dobivamo da ne može biti $f(x) < x$, pa slijedi $f(x) = x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

12. (Grčka, 1997) Neka za $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ vrijedi:

    (i) f je strogo rastuća,

    (ii) $f(x) > -\frac{1}{x}$, $\forall x > 0$,

    (iii) $f(x)f(f(x) + \frac{1}{x}) = 1$, $\forall x > 0$.

Odredite f.

Rješenje. Uvrstimo $f(x) + \frac{1}{x}$ u **??**. Zbog injektivnosti tada vrijedi

$$x = f(f(x) + \frac{1}{x}) + \frac{1}{f(x) + 1/x} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) + 1/x}.$$

13. (MEMO, 2009) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

Rješenje. Pretpostavimo da je $f(y_1) = f(y_2)$. Ako uvrstimo (x, y_1) i (x, y_2) u jednadžbu, vidimo da se razlikuju samo u prvom članu desne strane. Stoga imamo $(y_1 - y_2)f(x) = 0$. Ako uzmemo x takav da je $f(x) \neq 0$, onda dobivamo da je f injekcija. Ako uvrstimo $x = 0$ dobivamo

$$f(0) + f(f(0) + f(y)) = yf(0) + f(f(y)).$$

Sada vidimo da se za $y = 1$ nešto krati, pa dobivamo $f(f(0) + f(1)) = f(f(1))$. Zbog injektivnosti slijedi $f(0) = 0$. Sada uvrstimo $y = 0$ u početnu jednadžbu i dobivamo $f(f(x)) = f(x)$. Zbog injektivnosti slijedi $f(x) = x$.

14. (MEMO 2012) Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za svaki $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

*Rješenje.*Neka je $y > 1$. Uzmimo $x > 0$ takav da je $xy + 1 = y$, tj. $y = \frac{y-1}{y}$. Tada je

$$f(\frac{y-1}{y} + f(y)) = yf(y).$$

Slijedi

$$f(x + f(\frac{y-1}{y} + f(y))) = (\frac{y-1}{y} + f(y))f(x(\frac{y-1}{y} + f(y)) + 1).$$

Ako uvrstimo $x = y$, dobivamo

$$f(y + yf(y)) = (\frac{y-1}{y} + f(y))f(y + yf(y))$$

pa je $f(y) = 1/y$, za $y > 1$. Ako uvrstimo $x = 1$ u početnu jednadžbu zbog $xy + 1 > 1$ i $x + f(y) > 1$ imamo

$$\frac{1}{1 + f(y)} = \frac{y}{y + 1}.$$

Iz toga lako slijedi $f(y) = 1/y$ i za $y \leq 1$.

15. (IMO Shortlist 2009) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

Rješenje. Uvrstimo $x = 0$, slijedi $f(0) = f(yf(0))$. Slijedi $f(0) = 0$.

Uvrstimo $y = 0$. Slijedi

$$f(xf(x)) = x^2$$

pa je $[0, \infty]$ u slici od f.

Ako je $f(x) = 0$, tada je $f(0) = x^2$, pa je $x = 0$ jedina nultočka.

Injektivnost: ako je $f(x) = f(y)$, dobivamo

$$x^2 = f(xf(x)) = f(xf(y)) = f((y - x)f(x)) + x^2.$$

Slijedi $(y - x)f(x) = 0$ pa je $x = y$.

Neparnost: Imamo $f(-xf(-x)) = f(xf(x))$ pa je $2x(f(x) + f(-x)) = 0$.

Sada lako slijedi surjektivnost, dakle f je bijekcija.

Računamo

$$\begin{aligned}
f(xf(y)) &= f((y - x)f(x)) + x^2 \\
&= -f((x - y)f(x)) + x^2 \\
&= -f(yf(x - y)) - (x - y)^2 + x^2 \\
&= f(yf(y - x)) - (x - y)^2 + x^2 \\
&= f(-xf(y)) + y^2 - (x - y)^2 + x^2.
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi $f(xf(y)) = xy$.

16. (IMO Shortlist 1992) Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dokažite da postoji jedinstvena funkcija $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x.$$

Rješenje. Rekurzija, $a_0 = x$, $a_{n+1} = f(a_n)$.

Zadaci za samostalan rad

1. (Bugarska, 2014.) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ za koje vrijedi

$$f(xy) = f(x+y)(f(x) + f(y)).$$

2. (Baltička olimpijada 2014.) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x).$$

3. (Baltička olimpijada 2007.) Nađite sve surjektivne funkcije $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ takve da vrijedi

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

i

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}, \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$

4. (Balkan 1997) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

5. (IMO 2010.) Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor.$$

6. (IMO shortlist 2007) Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da vrijedi

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1,$$

za sve $n, m \in \mathbb{N}$. Odredite sve moguće vrijednosti $f(2007)$.

Dodatni izvori zadataka

- Marko Radovanović, Functional equations, (http://www.imomath.com/index.php?options=338)
- IMO Shortlist
- http://www.artofproblemsolving.com/