Algebarske manipulacije i nejednakosti

Uvod

Cilj ovog predavanja je pokazati na primjerima snagu algebarskih manipulacija u rješavanju nekih vrlo teških natjecateljskih nejednakosti. U predavanju se ne koriste nikakve napredne metode niti alati matematičke analize. Jedini teoremi s kojima bi čitatelj trebao biti upoznat su sljedeći:

Teorem 1 (Nejednakosti sredina). *Neka su $a_1, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Definirajmo za svaki realan broj k:*

$$S_k(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k \cdots + a_n^k}{n}} \quad za \quad k \neq 0 \quad i \quad S_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Tada za $m < n$ vrijedi $S_m \leq S_n$. Uz jednakost kad je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Teorem 2 (Cauchy-Schwarzova nejednakost). *Neka su $a_1, \dots, a_n$ i $b_1 \dots b_n$ realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Uz jednakost kad je $a_1 : a_2 : \dots a_n = b_1 : b_2 : \dots b_n$.

Teorem 3 (Monotono preuređenje vektora). *Neka su $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ realni brojevi i neka je $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ permutacija. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}$$

Teorem 4 (Čebiševljeva nejednakost). *Neka su $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \geq n \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}$$

Dokaze ovih teorema lako je naći na internetu tako da ovdje nisu navedeni. Radi kraćeg i preglednijeg zapisa, u daljnjem će tekstu znakovi $\sum$ i $\prod$ bez indeksa označavati cikličku sumaciju odnosno ciklični produkt.

Riješeni zadaci:

Zadaci su poslagani po težini. Međutim, težina zadatka je subjektivna ocjena pa probajte o svakome zadatku barem 15min sami razmisliti da znate u čemu njegova težina. Neka vas ne razočara ukoliko ne uspijete riješiti sve zadatke jer su neki vrlo teški.

1. Neka su a, b, c realni brojevi, takvi da je $ab + ac + bc = 0$. Dokažite da vrijedi:

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \geq abc(a+b+c-3)$$

Rješenje. U ovom zadatku vidimo da homogenizacija neće pomoći pa pogledajmo kako bismo još mogli iskoristiti uvjet. Uočitmo da se izraz $abc(a+b+c)$ pojavljuje u raspisu $(ab+ac+bc)^2$ pa pokušajmo to ikoristiti: $abc(a+b+c) = -\frac{1}{2}\sum(ab)^2$. Uvrštavajući to u nejednakost, ostaje nam za dokazati:

$$\sum(2a^2 + a^2b^2 - 2a^2b + 2abc) \geq 0$$

Ovaj izraz sad već jako podsjeća na izraz koji dobijemo u kvadratu trinoma pa pokušajmo namjestiti izraz na to oduzimanjem $2(ab + ac + bc)$ od lijeve strane:

$$\sum(a^2b^2 + a^2 + c^2 - 2a^2b - 2ac) = \sum(ab + c - a)^2 \geq 0$$

čime je dokaz završen. Jednakost se očito postiže za $a = b = c$. ■

2. Neka su a, b, c, d realni brojevi, takvi da je $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16$. Dokažite da vrijedi:

$$-3 \leq ab + ac + ad + bc + bd - abcd \leq 5$$

Rješenje. U ovom zadatku imamo vrlo nestandardan uvjet, koji je nehomogen i s kojim, na prvi pogled, ne možemo ništa. Međutim, često takvi uvjeti sugeriraju rješenje. Prisjetimo se vrlo korisnog identiteta u kojem se pojavljuje umnožak sume dva kvadrata:

$$(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) = (xz + yw)^2 + (xw - yz)^2$$

Vidimo da je ovime zadatak skoro gotov. Zapišimo uvjet u obliku:

$$\prod(1+a^2) = \left[(a+b)^2 + (1-ab)^2\right]\left[(c+d)^2 + (cd-1)^2\right]$$

Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost znamo da vrijedi:

$$16 = \left[(a+b)^2 + (1-ab)^2\right]\left[(c+d)^2 + (cd-1)^2\right] \geq \left[(a+b)(c+d) + (1-ab)(cd-1)\right]^2$$

Odakle raspisivanjem desne zagrade slijedi tvrdnja. ■

3. Neka su $a, b, c, d \geq 0$realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} + \frac{1}{5-c} + \frac{1}{5-d} \leq 1$$

Rješenje. Jedna, možda nestandardna, ideja je zapisati nejednakost u obliku:

$$\sum \frac{1-a}{5-a} \geq 0$$

Sada primjetimo da znamo da je $\sum(1-a^2) = 0$ pa ćemo probati to dobiti u brojniku. To radimo zbog toga što Čebiševljeva nejednakost kaže da je suma nekih umnožaka (pomnožena s konstantom) veća ili jednaka umnošku suma pa ćemo na taj način probati "izolirati" sumu brojnika.

$$\sum \frac{1-a}{5-a} = \sum \frac{1-a^2}{(5-a)(1+a)}$$

Sad još samo treba provjeriti da su funkcije: $1 - x$ i $\frac{1}{(5-x)(1+x)}$ obje padajuće na intervalu $[0, 2]$, što je trivijalno. Konačno, iz Čebiševljeve nejednakosti vrijedi:

$$\sum \frac{1-a^2}{(5-a)(1+a)} \geq \frac{1}{3} \sum(1-a^2) \sum \frac{1}{(5-a)(1+a)} = 0$$

■

*Napomena: Ova nejednakost može se pokazati i korištenjem ograde:

$$\frac{1}{5-x} \leq \frac{x^2}{32} + \frac{7}{32}$$

koja vrijedi za $x \in [0, 2]$, međutim to nije dio ovog predavanja.

4. Neka su $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1 \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$$

Dokažite da vrijedi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \leq n$$

Rješenje. Kad bismo primjenili Cauchy-Schwarzovu nejednakost odmah na na lijevu stranu, ograda bi bila preslaba. Međutim, teško je ičim drugim ocijeniti lijevu stranu pa ostajemo kod te ideje, samo je malo izmijenimo. Uvedimo oznake: $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$ i $B = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Ako su i A i B, jednaki 0, nejednakost vrijedi pa pretpostavimo da je barem jedan različit od 0. Tada iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi:

$$(A^2+B^2)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_iA+b_iB)\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n}(a_iA+b_iB)^2 = n(A^2+B^2)$$

Dijeljenjem obje strane s (A^2+B^2) dobivamo traženu nejednakost. Primjetimo da se jednakost postiže npr. za $a_1=1$, $a_2=\cdots=a_n=0$, $b_1=0$, $b_2=\cdots=b_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}$.
■

*Napomena 1: Nejednakost se može dokazati i namještanjem pogodnog skalarnog produkta jer vidimo da uvjet možemo zapisati vektorski na način da uzmemo $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,\ldots,b_n)$ za koje vrijedi: $\langle a,a\rangle=\langle b,b\rangle=1$ i $\langle a,b\rangle=0$

*Napomena 2: Pokušajte na sličan način dokazati nejednakost Minkowskog

5. Neka su $a,b,c>0$ konstante i $x,y,z>0$ realni brojevi takvi da je $ax+by+cz=xyz$. Dokažite da postoji jedinstven realan broj d takav da je

$$\frac{2}{d}=\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}$$

i dokažite da je tada minimum izraza $x+y+z$ jednak $\sqrt{d(d+a)(d+b)(d+c)}$.

Rješenje: Često je dobro homogenizirati nejednakost pa napravimo to. Tvrdimo da je minimum izraza:

$$\frac{(x+y+z)^2(ax+by+cz)}{xyz} \qquad (1)$$

gdje su sad $x,y,z>0$ proizvoljni realni brojevi jednak traženom minimumu (Zašto?). Kad smo se riješili "čudnog" uvjeta, imamo puno alata za rješavanje ovakvih problema. Što se prvog dijela zadatka tiče, tvrdnja slijedi iz toga što je funkcija $f(x)=\frac{x}{a+x}$ rastuća na $[0,+\infty)$ za $a>0$. Što se drugog dijela tiče, ideja je primjeniti AG na (1), ali malo "modificiran" da bismo očuvali uvjet jednakosti. Neka su m,n,p,m_1,n_1,p_1 pozitivni brojevi, takvi da je $m+n+p=am_1+bn_1+cp_1=1$.Iz AG-a vrijedi:

$$x+y+z=m\cdot\frac{x}{m}+n\cdot\frac{y}{n}+p\cdot\frac{z}{p}\ge\frac{x^my^nz^p}{m^mn^np^p} \qquad (2)$$

i

$$ax+by+cz=m_1\cdot\frac{ax}{m_1}+n_1\cdot\frac{by}{n_1}+p_1\cdot\frac{cz}{p_1}\ge\frac{x^{am_1}y^{bn_1}z^{cp_1}}{m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1}} \qquad (3)$$

Iz (2) i (3) slijedi:

$$(x+y+z)^2(ax+by+cz)\ge\frac{x^{2m+am_1}y^{2n+bn_1}z^{2p+cp_1}}{m^{2m}n^{2n}p^{2p}m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1}}$$

Gdje jednakost vrijedi za $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ i $\frac{x}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1}$

Sada, želimo namjestiti koeficijente tako da vrijedi:

$$2m + am_1 = 2n + bn_1 = 2p + cp_1 = 1$$

Stavimo $k = \frac{2m}{m_1} = \frac{2n}{n_1} = \frac{2p}{p_1}$. Tada vidimo da vrijedi:

$$2am + 2bn + 2cp = k$$

i

$$2m\left(\frac{a}{k} + 1\right) = 2n\left(\frac{b}{k} + 1\right) = 2p\left(\frac{c}{k} + 1\right) = 1$$

Iz ova 2 uvjeta slijedi konačno:

$$\frac{ak}{a+k} + \frac{bk}{b+k} + \frac{ck}{c+k} = k \Leftrightarrow \frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k} + \frac{1}{c+k} = \frac{2}{k}$$

Kako je rješenje ove jednadžbe jedinstveno, vrijedi da je $k = d$ i jednostavnim računom dobijemo

$$m^{2m}n^{2n}p^{2p}m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1} = \frac{1}{d(d+a)(d+b)(d+c)}$$

Odakle slijedi tvrdnja zadatka. ■

6. Neka su $a, b, c, d, e \geq 0$ realni brojevi, takvi da je $a + b + c + d + e = 5$. Dokažite da vrijedi:

$$abc + bcd + cde + dea + eab \leq 5$$

Rješenje. Kod ovog zadatka gotovo svi standardni pristupi, u kojima primjenjujemo nejednakost na sve članove, ne prolaze pa je potrebno malo više "analitički" pristupiti zadatku i pametno transformirati izraz. Kako to napraviti? Vrlo često je dobro primjenjivati nejednakosti na sumu nekih brojeva umjesto na svaki član posebno jer se sume "ponašaju" bolje od brojeva što se jednakosti tiče (ne moraju svi članovi suma biti jednaki da bi dvije sume bile jednake).

To nas vodi na ideju da pokušamo barem djelomično faktorizirati nejednakost da bismo onda primjenili AG nejednakost, koja nam kaže da je umnožak nečega manji do sume. Bez smanjenja općenitosti, smijemo pretpostaviti da je e najmanji broj. Sada iz AG nejednakosti vrijedi:

$$abc + bcd + cde + dea + eab = e(a+c)(b+d) + bc(a+d-e)$$
$$\leq \frac{1}{4}e \cdot (a+b+c+d)^2 + \frac{1}{27}(a+b+c+d-e)^3 = \frac{1}{4}e(5-e)^2 + \frac{1}{27}(5-2e)^3$$

Dakle, ostaje za dokazati da je: $\frac{1}{4}e(5-e)^2 + \frac{1}{27}(5-2e)^3 \leq 5$.

Međutim, to je ekvivalentno s: $(e-1)^2(e+8) \geq 0$, pa je nejednakost dokazana. ■

7. Odredi najmanji realan broj M takav da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Rješenje. Ovdje je vrlo očito da se lijeva strana nejednakosti treba faktorizirati pa najprije napravimo to. Dakle, nejednakost je ekvivalentna s:

$$|(a + b + c)(a - b)(b - c)(a - c)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Sada primjetimo da na lijevoj strani imamo umnožak nekih članova, a na desnoj zbroj. To nam sugerira da ćemo koristiti AG nejednakost. Za to bi bilo dobro da su pribrojnici na desnoj strani isti kao i članovi umnoška na lijevoj strani. Zbog toga ćemo transformirati nejednakost u oblik:

$$|(a + b + c)(a - b)(b - c)(a - c)| \leq \frac{M}{9}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a + b + c)^2)^2$$

Radi preglednosti, sad možemo staviti da je $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$ i $s = a + b + c$. Primjetimo da je $x + y + z = 0$, a nejednakost postaje:

$$|xyzs| \leq \frac{M}{9}(x^2 + y^2 + z^2 + s^2)^2$$

Ovo je već puno bliže obliku AG nejednakosti na 4 člana. Međutim, moramo paziti na uvjet $x + y + z = 0$ zbog kojeg ne možemo direktno primjeniti AG. Međutim, kako je poečtna nejednakost simetrična (zbog apsolutne vrijednosti), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a \geq b \geq c$, tj. $x, y \geq 0$. Riješimo se sad i zadnjeg uvjeta i stavimo da je $z = -x - y$ Dakle, nejednakost postaje:

$$|xy(x + y)s| \leq \frac{M}{9}(x^2 + y^2 + (x + y)^2 + s^2)^2$$

Konačno, pretpostavimo da će se jednakost postizati kad je $x = y$ pa primjenimo AG nejednakost najprije za 4 člana pa na 2 člana na način:

$$\left((x^2 + y^2) + 2 \cdot \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)^2 + s^2\right)^2 \geq 16 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)^2 |s| \geq 16\sqrt{2}|xy(x+y)s|$$

Provjerimo može li se postići jednakost. Iz slučajeva jednakosti u AG-u dobivamo da mora vrijediti $x = y = \frac{s}{\sqrt{2}}$, tj. $a - b = b - c = \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$ odakle lako slijedi da se jednakost postiže npr za: $(a, b, c) = \left(\frac{3\sqrt{2}+2}{2}, 1, \frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Dakle, ograda je stroga i vrijedi $M = \frac{9}{16\sqrt{2}}$. ■

8. Neka su a, b, c realni brojevi. Dokaži da vrijedi:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3 b + b^3 c + c^3 a)$$

Riješenje. Ovaj zadatak, iako izgleda jednostavno, izuzetno je težak, ali pokazat ćemo kako do rješenja doći metodično. Za neke korake je potrebno puno iskustva u algebarskim manipulacijama. Čitatelju je vjerojatno poznata metoda zapisivanja rješenja pomoću sume kvadrata i to je vjerojatno nešto čime se u nekom trenutku proba riješiti ovaj zadatak. Međutim ovdje to ne pomaže, ali to će nam dati naznaku kako krenuti. Transformirajmo najprije nejednakost u oblik:

$$\sum a^4 - \sum a^2b^2 \geq 3\left(\sum a^3b - \sum a^2b^2\right)$$

Vidimo da se sada lijeva strana može zapisati u obliku sume kvadrata, ali desna nije postala ništa "bolja". Ideja zapisa u obliku sume kvadrata nam daje ideju da desnu stranu još transforiramo tako da oduzmemo i dodamo sumu koja je još manja od $\sum a^2b^2$, a to je $\sum a^2bc$ da bismo dobili još jednu sumu kvadrata na lijevoj strani. Tada nejednakost postaje:

$$\sum a^4 - \sum a^2b^2 + 3\left(\sum a^2b^2 - \sum a^2bc\right) \geq 3\left(\sum a^3b - \sum a^2bc\right)$$

Zapišimo nejednakost na način:

$$\frac{1}{2}\sum(a^2-b^2)^2 + 3\left(\sum a^2b^2 - \sum a^2bc\right) \geq 3\sum ab(a^2-c^2)$$

Još nam ostaje srediti drugi. Očito je da je on pozitivan, ali ako ga raspišemo kao sumu kvadrata na analogan način kao što smo prvi član, ne dobijemo ništa korisno. U ovom slučaju, morat ćemo biti "maštovitiji" i pokušati sa sličnim identitetom:

$$\sum x^2 - \sum xy = \frac{1}{6}\sum(x+y-2z)^2$$

Nejednakost sada možemo zapisati u obliku:

$$\frac{1}{2}\sum(a^2-c^2)^2 + \frac{1}{2}\sum(ac+bc-2ab)^2 \geq 3\sum ab(a^2-c^2)$$

Ovo nas, konačno, podsjeća na kvadrat binoma, ali "nedostaju" neki članovi na desnoj strani. Ipak, ako primjetimo da vrijedi:

$$0 = (ab+ac+bc)\sum(a^2-c^2) = \sum(ab+ac+bc)(a^2-c^2)$$

i oduzmemo to od desne strane, nejednakost se svodi točno na oblik za sumu kvadrata binoma na način:

$$\sum\left(\frac{1}{2}(a^2-c^2)^2 + \frac{1}{2}(ac+bc-2ab)^2 - (ac+bc-2ab)(a^2-c^2)\right) \geq 0$$

što je ekvivalentno s:

$$\frac{1}{2}\sum(a^2-c^2-ac-bc+2ab)^2 \geq 0$$

I nejednakost je dokazana. Jednakost očito vrijedi u slučaju $a = b = c$, ali razlog zbog kojeg je ovaj zadatak toliko težak je taj što jednakost vrijedi još i u slučaju kad su svi članovi zadnje sume jednaki 0, a to je, nakon malo raspisivanja, još i u slučaju kad je:

$$a : b : c = \sin^2 \frac{4\pi}{7} : \sin^2 \frac{2\pi}{7} : \sin^2 \frac{\pi}{7}$$

Ovime je zadatak dovršen. ■

*Napomena: Na sličan način kao što je ovaj zadatak riješen, može se dokazati sljedeći izuzetno jak teorem:

Teorem 5. *Neka su a, b, c realni brojevi i n, p, q realne konstante. Tada nejednakost:*

$$\sum a^4 + n \sum a^2b^2 + p \sum a^3b + q \sum ab^3 - (1 + n + p + q) \sum a^2bc \geq 0$$

Vrijedi ako je $3 \cdot (1 + n) \geq p^2 + pq + q^2$

Zadaci za vježbu

1. Neka su $a, b, c, d > 0$ realni brojevi takvi da je $abcd = 1$ i

$$a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

   Dokažite:

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$$

2. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

   (a)
$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

   (b)
$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

3. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da je $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 10$. Odredite minimum i maksimum izraza:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

5. Neka su $a, b, c > 0$, takvi da je $a \geq b \geq c$. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{a(a-\sqrt{ab}+b)} + \sqrt{b(b-\sqrt{bc}+c)} + \sqrt{c(c-\sqrt{ca}+c)} \geq a + b + c$$

   (a) uz uvjet da su a, b, c stranice trokuta

   (b) bez tog uvjeta

6. Neka su $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ i $y_1 < \cdots < y_n$ realni brojevi takvi da je:

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1^{13} + \ldots x_n^{13}$$

   Dokažite da vrijedi:

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \cdots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

7. Neka su a, b, c realni brojevi, takvi da je $a + b + c = 3$. Dokaži da je

$$(ab + ac + bc - 3)^2 \geq 27(abc - 1)$$

   Kada vrijedi jednakost?