SUSTAVI JEDNADŽBI

Daria Popović, 4.r., V. gimnazija, Zagreb

Obično se pri rješavanju sustava jednadžbi koristimo uobičajenim, tj. standardnim metodama rješavanja, no bitnije je prije svega toga uočiti neke pravilnosti i simetrije koje omogućavaju brže i učinkovitije rješavanje određeniih tipova zadataka. Na sljedećim primjerima otkrit ćemo vam neke od "trikova" koje možete primjenjivati na različitim zadatcima, a možda ćete preko njih i sami otkriti neke nove.

Primjer 1. Riješimo sustav:

$$\begin{cases} xy + yz = 882, \\ yz + zx = 992, \\ zx + xy = 572. \end{cases}$$

Rješenje: Ako pažljivije promotrimo lijeve strane jednadžbi, odmah uočavamo da se član xy u sustavu pojavljuje dva puta, isto kao i članovi yz i zx. To ćemo pokušati iskoristiti tako da ćemo zbrojiti sve tri jednadžbe i dobiveni zbroj podijeliti s 2. Tada dobivamo:

$$xy + yz + zx = 1223.$$

Sada od ove jednadžbe oduzmimo prvu iz zadanog sustava pa ćemo dobiti:

$$zx = 341.$$

Isti postupak napravit ćemo i za drugu i treću jednadžbu sustava, tako da sada imamo novi sustav:

$$\begin{cases} xy = 231 \\ yz = 651 \\ zx = 341. \end{cases}$$

Kako se ovdje svaka od nepoznanica x, y, z pojavljuje dva puta, mogli bismo te jednadžbe pomnožiti. Iz toga slijedi:

$$x^2y^2z^2 = 341 \cdot 231 \cdot 651,$$

tj.

$$xyz = \pm 7161.$$

Da bismo došli do konačnog rješenja, ovu jednadžbu moramo podijeliti sa svakom od tri prethodno izvedene. Tako dijeljenjem s prvom jednadžbom dobivamo $x = 11$, dijeljenjem s drugom dobivamo $y = 21$ i, na kraju, dijeljenjem s trećom rješenje će biti $z = 31$. Ako uzmemo da je $xyz = -7161$, tada je $x = -11$, $y = -21$, $z = -31$, pa je $(-11, -21, -31)$ drugo rješenje sustava, i to su sva njegova rješenja.

Primjer 2. Riješimo sustav:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4b, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4a. \end{cases}$$

Rješenje: Opet, kao i u prethodnom zadatku, uočavamo da se elementi ponavljaju. Tako je zbroj elemenata prvog stupca $6x_1$, drugog $6x_2$, trećeg $6x_3$ i četvrtog $6x_4$. Ako jednadžbe sustava zbrojimo i malo ih sredimo, dobivamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a + b.$$

Sada redom oduzimamo ovu jednadžbu od svake iz zadanog sustava. Oduzimanjem od prve jednadžbe dobiva se:

$$2x_1 = a - b,$$

tj.

$$x_1 = \frac{a-b}{2}.$$

Ako je oduzmemo od druge, dobit ćemo:

$$2x_2 = 3b - a,$$

tj.

$$x_2 = \frac{3b-a}{2},$$

i tako redom. Na kraju dobivamo da je jedinstveno rješenje sustava $\left(\frac{a-b}{2}, \frac{3b-a}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{3a-b}{2}\right)$.

Primjer 3. Riješimo sustav:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3 \\ x^2y + xy^2 = 6a^3 \end{cases},$$

gdje je a bilo koji realni broj.

Rješenje: Uočimo da iz $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ možemo dobiti $x^3 + y^3$ i da vrijedi

$$(x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 9a^3,$$

tj.

$$(x+y)^3 - 3(x^2y + xy^2) = 9a^3.$$

U drugoj zadanoj jednadžbi vidi se čemu je jednak zbroj $x^2y + xy^2$, pa ćemo to primijeniti u gornjoj jednadžbi:

$$(x+y)^3 - 18a^3 = 9a^3,$$

tj.

$$(x+y)^3 = 27a^3.$$

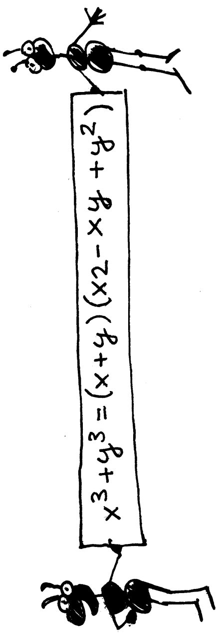
Iz ovoga proizlazi:

$$x + y = 3a,$$

tj.

$$y = 3a - x.$$

Ovu jednadžbu možemo uvrstiti bilo u prvu, bilo u drugu jednadžbu sustava. Uvrstimo je, primjerice, u drugu:



$$x^2(3a-x) + x(3a-x)^2 = 6a^3,$$

tj. (sredimo li cijeli izraz):

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0.$$

Polinom se može faktorizirati:

$$(x-a)(x-2a) = 0.$$

Sada iz ovoga slijede rješenja $x_1 = a$, $x_2 = 2a$, a iz $y = 3a - x$ dobivamo $y_1 = 2a$, $y_2 = a$. Jedina realna rješenja ovog sustava su $(a, 2a)$ i $(2a, a)$.

Primjer 4. Riješimo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 &= 2, \\ \qquad \vdots & \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} &= n. \end{cases}$$

Rješenje: Uzmimo da je

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = s. \tag{1}$$

Zbrojimo li sve jednadžbe, dobivamo:

$$s + 2s + 3s + \ldots + ns = 1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$

iz čega slijedi da je $s = 1$. Oduzme li se od prve jednadžbe druga, dobiva se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - nx_1 = -1.$$

Primijenimo li izraz (1) na ovu jednadžbu, slijedi:

$$s - nx_1 = -1.$$

Zbog $s = 1$ sređivanjem se dobiva:

$$nx_1 = 2,$$

tj.

$$x_1 = \frac{2}{n}.$$

Isto napravimo i za drugu jednadžbu, pa je

$$x_2 = \frac{2}{n},$$

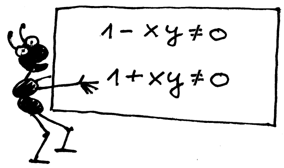
i tako redom, iz čega zaključujemo da je

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = \frac{2}{n}.$$

Na kraju, ako od zadnje oduzmemo prvu jednadžbu dobivamo da je

$$x_n = \frac{2-n}{n}.$$

Primjer 5. Riješimo sustav:



$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1-xy} + \dfrac{x-y}{1+xy} = 5, \\ \dfrac{x+y}{1+xy} + \dfrac{x-y}{1-xy} = 4. \end{cases}$$

Rješenje: Kao prvo, da bi sustav imao rješenja, mora biti $xy \neq 1$ i $xy \neq -1$. Dalje množimo pojedinu jednadžbu s $(1-xy)(1+xy)$ pa se, nakon sređivanja, dobiva:

$$\begin{aligned} 2x(1+y^2) &= 5(1-x^2y^2), \\ 2x(1-y^2) &= 4(1-x^2y^2). \end{aligned}$$

Uvrstimo li $x = 0$, vidi se da to nije rješenje pa se jednadžbe smiju podijeliti. Na taj način dolazimo do jednadžbe:

$$\frac{1-y^2}{1+y^2} = \frac{4}{5},$$

čija su rješenja $y_1 = \dfrac{1}{3}$, $y_2 = -\dfrac{1}{3}$. Uvrstimo li te vrijednosti, dobivamo rješenja za x : $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{13}$. Prema tome, rješenja sustava su:

$$\left(-2+\sqrt{13}, \frac{1}{3}\right), \left(-2+\sqrt{13}, -\frac{1}{3}\right), \left(-2-\sqrt{13}, \frac{1}{3}\right), \left(-2-\sqrt{13}, -\frac{1}{3}\right).$$

Probajte sada sami riješiti ove zadatke:

Zadatci:

1. Izračunajte $ab + cd$ ako je:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

($Rješenje$: 0)

2. Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0, \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0, \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0. \end{cases}$$

(*Rješenje*: $x = y = z = 2$)

3. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 3, \\ \vdots \\ x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2n - 1. \end{cases}$$

$$\left(\textit{Rješenje}: k = 1, 2, \ldots n,\ x_k = \pm\frac{2k-1}{n}\right)$$

Uredništvo **Matke** i *Nastavna sekcija Hrvatskog matematičkog društva* pozivaju sve učenike – dosadašnje pretplatnike i sve ostale čitatelje **Matke** na učlanjenje u *Matematički podmladak Hrvatskog matematičkog društva (HMD-a)*.

Između ostalih poslova HMD se bavi organizacijom stručnih predavanja za učenike, izdavanjem časopisa (**Matka**, *Matematičko fizički list*,...), knjiga (*Mala matematička biblioteka, Matkina biblioteka*), organizacijom matematičkih susreta i Ljetne škole te provodi sva matematička natjecanja u Hrvatskoj.

Dostavom osobnih podataka (ime, prezime, JMBG, mjesto i nadnevak rođenja, ime škole i razred, adresa stana i telefon) i uplatom iznosa od 60 kn na žiro račun HMD-a, broj 2360000-1101530802 (s naznakom: *za Matematički podmladak*) postajete punopravnim članom *Matematičkog podmlatka HMD-a*. Time ostvarujete pravo na člansku iskaznicu, redovito dobivanje časopisa **Matka** (4 broja godišnje) i popust pri kupnji ostalih izdanja *HMD-a*.

Očekujemo da ćete se odazvati našem pozivu te se učlaniti u *Matematički podmladak HMD-a* i na taj način osigurati svoj primjerak **Matke** kao i ostala prava i obveze.

Uredništvo