TETIVNI ČETVEROKUTI

SANJA VAROŠANEC, Zagreb

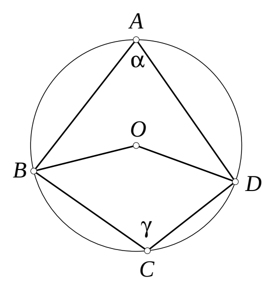
Obitelj je četverokuta vrlo velika. Neke njezine članove kao što su kvadrat, pravokutnik i paralelogram već ste dobro upoznali. Ovdje ćemo opisati jednog manje poznatog pripadnika te obitelji: tetivni četverokut.

Prije nego što se udubite u čitanje ovog članka pročitajte članak o obodnom i središnjem kutu u Matki br. 13.

Tetivni četverokut je četverokut oko kojeg se može opisati kružnica.

Drugim riječima, njegove stranice su tetive jedne kružnice, tj. vrhovi mu leže na jednoj te istoj kružnici (sl. 1.). Osnovno je svojstvo tetivnog četverokuta iskazano ovim teoremom:

Teorem. *Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak* $180°$.



Sl. 1.

Dokaz. Pri dokazu te tvrdnje koristimo se poučkom o obodnom i središnjem kutu. Naime, neka su α i γ nasuprotni kutovi u tetivnom četverokutu $ABCD$ (sl. 1.). Tada vrijedi:

$$\alpha = \sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\sphericalangle DOB$$
$$\gamma = \sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\sphericalangle BOD$$
$$\alpha + \gamma = \frac{1}{2}(\sphericalangle DOB + \sphericalangle BOD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Na isti se način dokazuje da je $\beta + \delta = 180°$.

Time smo dokazali: ako je četverokut tetivni, tada je zbroj nasuprotnih kutova $180°$.

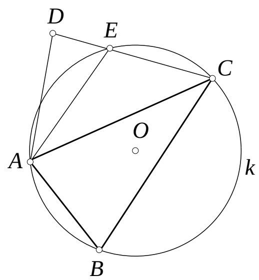
Potrebno je dokazati i obratnu tvrdnju: ako je zbroj nasuprotnih kutova $180°$, tada se četverokutu može opisati kružnica.

Neka je δ šiljasti kut. (Ako δ nije šiljasti, tada cijeli postupak provedemo za onaj kut koji jest šiljast.)

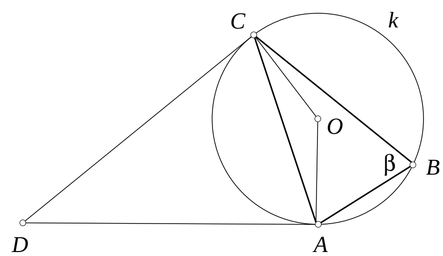
Oko trokuta ABC opišemo kružnicu k. Treba dokazati da je i točka D na toj kružnici k. Promotrimo prvo što se događa ako pretpostavimo da se D ne nalazi na k.

Kad se D nalazi izvan kruga, mogu se pojaviti dvije mogućnosti:

1. $\overline{DC}$ ili $\overline{DA}$ sijeku kružnicu k u točkama različitima od C i A (sl. 2.);



Sl. 2.



Sl. 3.

2. niti $\overline{DC}$ niti $\overline{DA}$ ne sijeku kružnicu k (sl. 3.).

Razmotrimo prvu mogućnost. Neka $\overline{DC}$ siječe kružnicu k u točki E. Tada je kut $\sphericalangle AEC$ veći od kuta $\sphericalangle ADC = \delta$. Ali četverokut $ABCE$ je tetivni pa vrijedi $\beta + \sphericalangle AEC = 180°$, tj. $\sphericalangle AEC = 180° - \beta$, a to je jednako δ prema pretpostavci da je zbroj nasuprotnih kutova β i δ jednak $180°$.

Dakle, u ovom se slučaju dobiva da je $\sphericalangle AEC = \delta > \sphericalangle ADC = \delta$, a to je nemoguće.

Razmotrimo drugu mogućnost. Pomoću poučka o središnjem kutu zaključujemo da je $\sphericalangle AOC = 2\beta$. Nadalje, vrijedi: $\sphericalangle DAO \geq 90°$ i $\sphericalangle OCD \geq 90°$. Uz to znamo i da je zbroj kutova u četverokutu $360°$ pa primjenom tih činjenica na četverokut $AOCD$ redom dobivamo:

$$\begin{gathered}
\sphericalangle DAO + \sphericalangle AOC + \sphericalangle OCD + \sphericalangle CDA = 360°,\\
90° + 2\beta + 90° + \delta \leq 360°,\\
2\beta + \delta \leq 180°,\\
\beta + (\beta + \delta) \leq 180°,\\
\beta + 180° \leq 180°,\\
\beta \leq 0°,
\end{gathered}$$

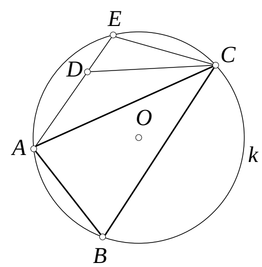
što je nemoguće. Dakle, niti druga mogućnost ne može se pojaviti.

Konačno razmotrimo i treću mogućnost kada je D u unutrašnjosti kruga (sl. 4.).

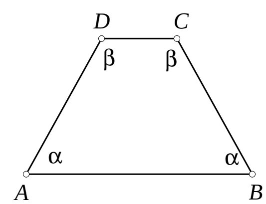
Neka pravac AD siječe kružnicu u točki E. Tada je $\sphericalangle AEC < \sphericalangle ADC = \delta$, a zbog činjenice da je četverokut $ABCE$ tetivni, vrijedi da je $\sphericalangle AEC + \beta = 180°$, tj. $\sphericalangle AEC = \delta$, pa dobivamo tvrdnju $\delta < \delta$ koja nije istinita.

Dakle, sve mogućnosti kad D nije na kružnici dovode do lažnih tvrdnji, pa zaključujemo da D leži na kružnici, a to je i trebalo dokazati. ■

Pokažimo na primjerima kako se primjenjuje dokazani poučak.



Sl. 4.

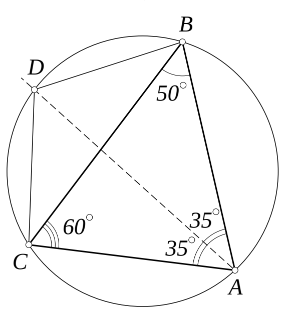


Sl. 5.

Primjer 1. Dokažite da je jednakokračan trapez tetivni četverokut, tj. da se oko njega može opisati kružnica.

Rješenje. Neka je $ABCD$ jednakokračan trapez, $|BC| = |AD|$ i $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Zbog jednakokračnosti kutovi $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle ABC$ sukladni su (označeni su s α), a isto tako i $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BCD = \beta$ (sl. 5.). Kutovi $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle CDA$ unutarnji su kutovi s iste strane transverzale AD paralela AB i DC, pa je njihov zbroj 180°, tj. $\alpha + \beta = 180°$. Time smo dobili da je zbroj nasuprotnih kutova 180°, tj. prema teoremu je trapez $ABCD$ tetivni.

Primjer 2. U trokutu ABC zadani su kutovi $\sphericalangle ABC = 50°$ i $\sphericalangle BAC = 70°$. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe tom trokutu opisanu kružnicu u točki D. Izračunajte kutove četverokuta $ABDC$.



Sl. 6.

Rješenje. Četverokut $ABDC$ (sl. 6.) je tetivni, pa prema teoremu imamo jednakost:

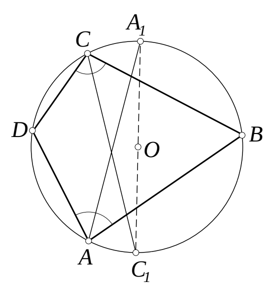
$$\begin{aligned} \sphericalangle CAB + \sphericalangle BDC &= 180^\circ \\ 70^\circ + \sphericalangle BDC &= 180^\circ \\ \sphericalangle BDC &= 110^\circ. \end{aligned}$$

Kutovi $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle DAC$ su obodni nad lukom $\widehat{DC}$, pa su i sukladni, tj. $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC = 35^\circ$. Iz istog razloga vrijedi i $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = 35^\circ$. Odatle dobivamo

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABD &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ, \\ \sphericalangle DCA &= \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCA = 35^\circ + 60^\circ = 95^\circ, \end{aligned}$$

Kutovi četverokuta $ABDC$ su 70°, 85°, 110° i 95°.

Primjer 3. Dokažite da simetrale dvaju nasuprotnih unutarnjih kutova tetivnog četverokuta sijeku tom četverokutu opisanu kružnicu u krajnjim točkama jednog te istog dijametra.



Sl. 7.

Rješenje. Neka su AA_1 i CC_1 simetrale kutova α i γ tetivnog četverokuta $ABCD$ (sl. 7.). Prema teoremu vrijedi

$$\alpha + \gamma = 180^\circ. \tag{1}$$

Zamijetimo da je i četverokut $ADCA_1$ također tetivni, pa i za njegove kutove vrijedi tvrdnja teorema, tj. redom vrijedi:

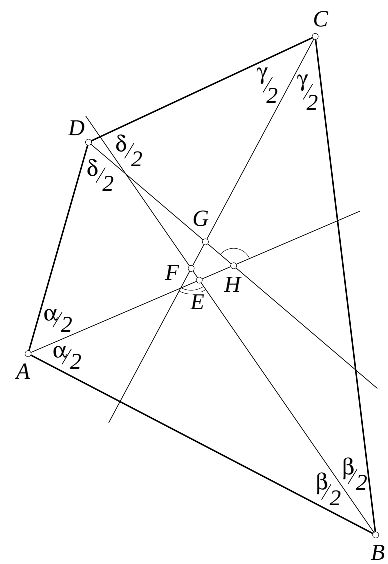
$$\begin{aligned} &\sphericalangle A_1AD + \sphericalangle DCA_1 = 180^\circ, \\ &\frac{\alpha}{2} + (\sphericalangle DCB + \sphericalangle BCA_1) = 180^\circ, \\ &\frac{\alpha}{2} + (\gamma + \sphericalangle BCA_1) = 180^\circ, \\ &\left(\frac{\alpha}{2} + \sphericalangle BCA_1\right) + \gamma = 180^\circ. \qquad (2) \end{aligned}$$

Iz (1) i (2) zaključujemo da je $\sphericalangle BCA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$. No, sad promotrimo kut $\sphericalangle C_1CA_1$.

$$\begin{aligned}\sphericalangle C_1CA_1 &= \sphericalangle C_1CB + \sphericalangle BCA_1 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}\\ &= \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.\end{aligned}$$

Obodni je kut $\sphericalangle C_1CA_1$ pravi, prema Talesovu teoremu $\overline{C_1A_1}$ je dijametar kružnice, pa su A_1 i C_1 zaista krajnje točke jednog te istog dijametra.

Primjer 4. Dokažite: ako simetrale unutarnjih kutova konveksnog četverokuta tvore četverokut, tada je taj četverokut tetivni.



Sl. 8.

Rješenje. Neka je $ABCD$ bilo koji četverokut čije simetrale kutova tvore četverokut $EFGH$ (sl. 8.). Iskoristimo činjenicu da je zbroj kutova u trokutu 180°.

U trokutu ABE vrijedi $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\sphericalangle BEA = 180^\circ$, tj. $\sphericalangle BEA = 180^\circ-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}$.

U trokutu CDG vrijedi $\dfrac{\delta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}+\sphericalangle DGC = 180^\circ$, tj. $\sphericalangle DGC = 180^\circ-\dfrac{\delta}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$.

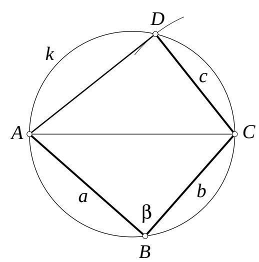
Uz to vrijedi i $\sphericalangle HEF = \sphericalangle BEA$ i $\sphericalangle FGH = \sphericalangle DGC$.

$\sphericalangle HEF$ i $\sphericalangle FGH$ su nasuprotni kutovi u četverokutu $EFGH$ i za njih vrijedi

$$\begin{aligned}\sphericalangle HEF + \sphericalangle FGH &= 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2} \\ &= 360^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} \\ &= 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ,\end{aligned}$$

pa je $EFGH$ tetivni četverokut.

Primjer 5. Konstruirajte tetivni četverokut ako je zadano:
a) polumjer kružnice opisane četverokutu, stranice a i c i jedna dijagonala;
b) tri stranice četverokuta a, b i c i kut β;
c) stranice a, b i kutovi α i β.



Sl. 9.

Rješenje. b) Pomoću danih elemenata a, b i β možemo konstruirati trokut ABC (vidi sl. 9.). Tom trokutu opišemo kružnicu k na poznat način. Točka D nalazi se na kružnici k i za c je udaljena od vrha C, pa D dobivamo kao presjek kružnice k i pomoćne kružnice sa središtem u C i radijusom c.

Za vježbu riješite sljedeće zadatke:

1. Zašto se oko pravokutnika može opisati kružnica, a oko paralelograma ne može?

2. Postoji li nejednakokračan trapez oko kojeg se može opisati kružnica?

3. Odredi kutove tetivnog četverokuta ako se oni odnose kao 1 : 3 : 6 : 8. (Rez.: $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 160^\circ$, $\delta = 120^\circ$.)

4. Neka je N nožište visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC. Dokaži da polovišta stranica trokuta, točka N i vrh C leže na istoj kružnici.

5. Dokaži da polovišta stranica trokuta i nožišta visina leže na istoj kružnici.

6. Oko trokuta ABC opisana je kružnica. Točkom A povučena je tangenta na tu kružnicu. Dokaži da svaki pravac paralelan s tom tangentom, a koji siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, odsijeca od trokuta ABC četverokut oko kojeg se može opisati kružnica.

7. Kakav mora biti četverokut $ABCD$ ako za duljine njegovih stranica vrijedi $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$, $|AB| \neq |BC|$ da bi se oko njega mogla opisati kružnica? (Rez.: dvopravokutni deltoid.)

8. Dokaži: ako se dvije tetive kružnice, koje su iste duljine, sijeku, onda su krajevi tih tetiva vrhovi jednakokračnog trapeza.