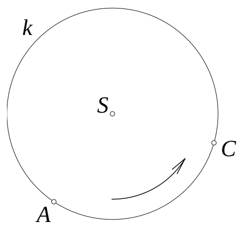
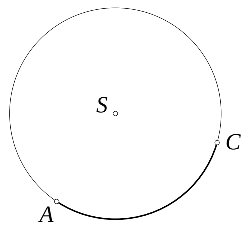
TEOREM O OBODNOM I SREDIŠNJEM KUTU

Sanja Varošanec, Zagreb

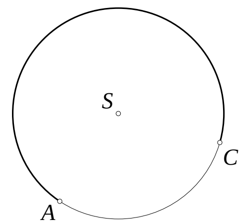
Neka je k kružnica sa središtem S, a A i C njezine dvije različite točke. Točke A i C dijele kružnicu na dva luka (sl. 1.a). Prateći pozitivan smjer obilaska kružnice, tj. smjer suprotan kretanju kazaljke sata, označimo te lukove s $\widehat{AC}$ (sl. 1.b) i $\widehat{CA}$ (sl. 1.c).



sl. 1.a

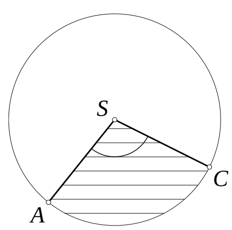


sl. 1.b

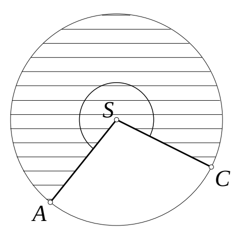


sl. 1.c

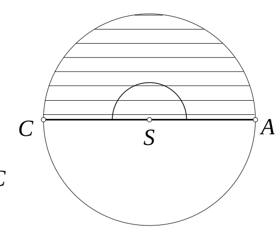
Svaki kut s vrhom u središtu S zvat ćemo *središnji kut* (sl. 2.).



sl. 2.a

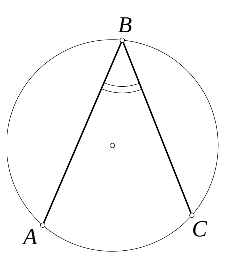


sl. 2.b

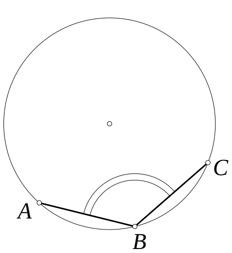


sl. 2.c

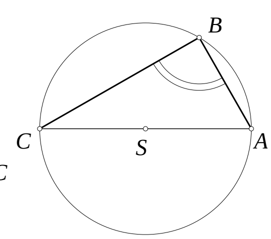
Kut čiji je vrh B na kružnici k, a njegovi krakovi sijeku tu kružnicu, nazivat ćemo *obodni kut* (sl. 3.).



sl. 3.a



sl. 3.b



sl. 3.c

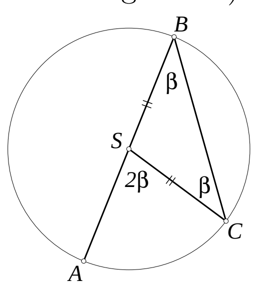
Cilj nam je uspostaviti vezu između središnjeg i obodnog kuta nad istim lukom. Do rješenja ćemo doći promatranjem posebnih slučajeva:

1° Neka su A, B, C tri različite točke kružnice k takve da je $\overline{AB}$ promjer kružnice (sl. 4).

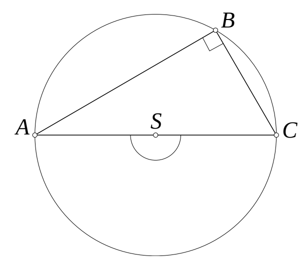
Budući je $|BS| = |SC|$, to je $\triangle CBS$ jednakokračan i $\sphericalangle BCS = \sphericalangle SBC = \beta$. Kut ASC vanjski je kut trokuta CBS, pa je jednak zbroju preostala dva kuta s vrhovima B i C, tj.

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle BCS + \sphericalangle SBC = \beta + \beta = 2\beta.$$

Dakle, u ovom drugom slučaju središnji kut $\sphericalangle ASC$ nad lukom $\widehat{AC}$ dva je puta veći od obodnog kuta $\sphericalangle ABC$ nad istim tim lukom $\widehat{AC}$.



sl. 4.



sl. 5.

2° Neka su sad A, B, C tri različite točke kružnice k takve da je $\overline{AC}$ promjer (sl. 5.).

U ovom je slučaju središnji kut $\sphericalangle ASC$ 180°, a prema Talesovu poučku, obodni kut $\sphericalangle ABC$ je pravi, tj. 90°. Dakle, opet vrijedi tvrdnja: središnji kut $\sphericalangle ASC$ dva je puta veći od obodnog kuta $\sphericalangle ABC$.

3° U ovom slučaju postavimo točke A, B, C na kružnicu tako da se središte S nalazi u unutrašnjosti kuta $\sphericalangle ABC$ (sl. 6.).

S B' označimo točku na kružnici k dijametralno suprotnu točki B. Sad su točke A, B, B' u položaju kao u slučaju 1° ($\overline{BB'}$ je promjer), pa je:

$$\sphericalangle ASB' = 2\sphericalangle ABB'.$$

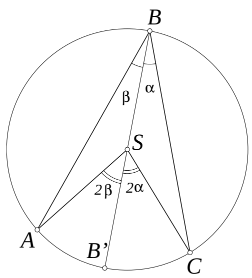
Isto tako, i točke B', B, C u položaju su iz slučaja 1°, pa je:

$$\sphericalangle B'SC = 2\sphericalangle B'BC.$$

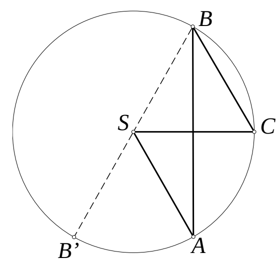
Zapišemo li središnji kut $\sphericalangle ASC$ kao zbroj dva središnja kuta $\sphericalangle ASB'$ i $\sphericalangle B'SC$, tad vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle ASC &= \sphericalangle ASB' + \sphericalangle B'SC = 2\sphericalangle ABB' + 2\sphericalangle B'BC \\
&= 2(\sphericalangle ABB' + \sphericalangle B'BC) = 2\sphericalangle ABC,
\end{aligned}
$$

tj. središnji kut $\sphericalangle ASC$ dva je puta veći od obodnog kuta $\sphericalangle ABC$.



sl. 6.



sl. 7.

4° Preostaje još razmotriti položaj točaka A, B, C kad je središte S izvan kuta $\sphericalangle ABC$ (sl. 7).

S B' označimo točku dijametralno suprotnu točki B. Uočimo li da je

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle B'SC - \sphericalangle B'SA$$

i primijenimo li slučaj 1° na točke B', B, A, odnosno B', B, C, dobivamo:

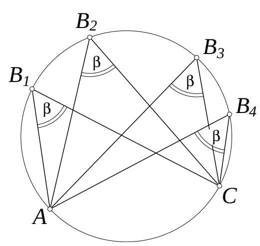
$$
\begin{aligned}
\sphericalangle ASC &= \sphericalangle B'SC - \sphericalangle B'SA = 2\sphericalangle B'BC - 2\sphericalangle B'BA \\
&= 2(\sphericalangle B'BC - \sphericalangle B'BA) = 2\sphericalangle ABC.
\end{aligned}
$$

Dakle, i za ovaj položaj točaka A, B, C vrijedi da je središnji kut $\sphericalangle ASC$ dva puta veći od obodnog kuta $\sphericalangle ABC$.

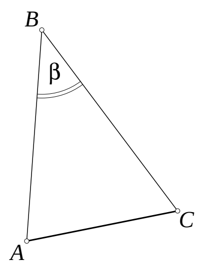
Time smo dokazali sljedeći teorem:

Teorem o obodnom i središnjem kutu. *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.*

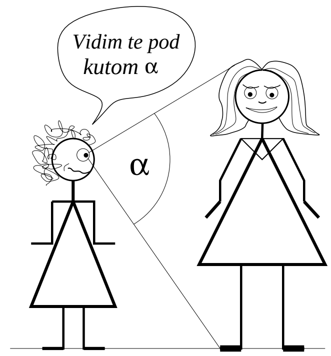
Neposredna je posljedica ovog teorema tvrdnja da su svi obodni kutovi nad istim lukom međusobno jednaki (sl. 8.):



sl. 8.



sl. 9.a

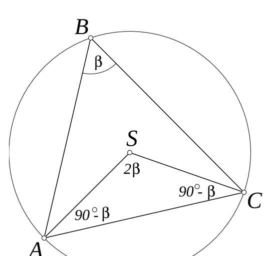


sl. 9.b

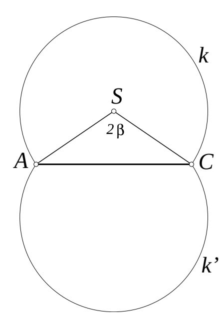
Uvedimo još jedan novi pojam. Neka je $\overline{AC}$ dužina, a B bilo koja točka ravnine. Kažemo da se iz točke B dužina $\overline{AC}$ *vidi pod kutom* $\sphericalangle ABC$ (sl. 9a i 9b).

Primjer 1. Ako je dana dužina $\overline{AC}$ i kut β, odredi skup točaka ravnine iz kojih se dužina $\overline{AC}$ vidi pod kutom β.

Rješenje. Neka je β šiljasti kut. Nad dužinom $\overline{AC}$ konstruirajmo jednakokračan trokut $\triangle ACS$ s kutovima $\sphericalangle ASC = 2\beta$, $\sphericalangle CAS = \sphericalangle SCA = 90° - \beta$. Neka je k kružnica radijusa $|SA|$ i središta S. Ako je B bilo koja točka luka $\widehat{CA}$, tada prema teoremu o obodnom i središnjem kutu $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle ASC = \beta$. Dakle, iz svake se točke luka $\widehat{CA}$ (ne uključujemo točke A i C) dužina $\overline{AC}$ vidi pod kutom β. Isto tako, nacrtamo li osnosimetričnu sliku s obzirom na pravac AC, dobit ćemo još jedan luk iz čijih se točaka dužina $\overline{AC}$ vidi pod lukom β (sl. 11.).



sl. 10.



sl. 11

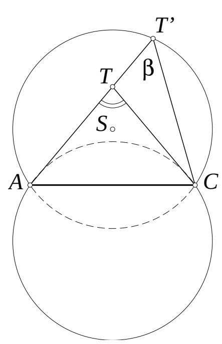
Tvrdimo da je unija ta dva luka, isključujući točke A i C, traženi skup točaka iz kojih se dužina $\overline{AC}$ vidi pod kutom β.

Prema prethodnom razmatranju točke tih dvaju lukova imaju traženo svojstvo. Treba još pokazati da niti jedna točka ravnine koja ne pripada tim dvama lukovima nema to svojstvo.

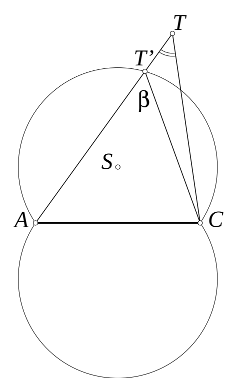
Neka je T bilo koja točka u dijelu ravnine omeđenom lukom $\widehat{CA}$ i dužinom $\overline{AC}$ (sl. 12.), a T' presjek luka $\widehat{CA}$ i pravca AT. Tada je $\sphericalangle ATC$ vanjski kut trokuta $\triangle TCT'$ pa je kut $\sphericalangle ATC = \beta + \sphericalangle TCT' > \beta$, tj. iz točke T dužina $\overline{AC}$ ne vidi se pod kutom β. Ako je T točka gornje poluravnine izvan kruga, tad spojimo T s A i C. Jedna od dužina $\overline{TA}$ i $\overline{TC}$ (a možda i obje) sjeći će luk $\widehat{CA}$. Neka, na primjer, dužina $\overline{TA}$ siječe luk $\widehat{CA}$ u točki T'. Tada je $\sphericalangle AT'C$ vanjski kut trokuta $\triangle T'CT$, pa vrijedi:

$$\beta = \sphericalangle AT'C = \sphericalangle T'TC + \sphericalangle TCT' \quad \text{tj.} \quad \sphericalangle T'TC > \beta,$$

tj. ni iz takve se točke T dužina $\overline{AC}$ ne vidi pod kutom β. Ukoliko se točka T nalazi u donjoj poluravnini, tad se zaključuje analogno, jer se promatra točka T i njezin položaj prema osnosimetričnom luku $\widehat{AC}$.



sl. 12.



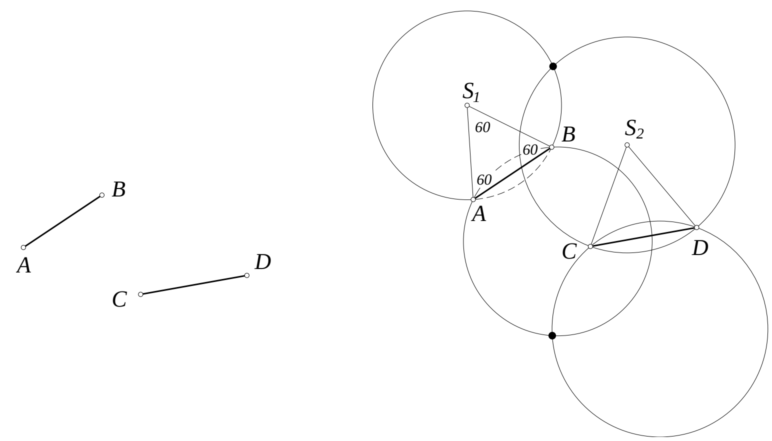
sl. 13.

Neposredna je posljedica ovog primjera: Skup svih točaka iz kojih se pod pravim kutom vidi dužina $\overline{AC}$ kružnica je kojoj je $\overline{AC}$ promjer bez točaka A i C.

Primjer 2. Zbroj obodnog i pripadnog središnjeg kuta je 330°. Koliki je središnji kut?

Rješenje. S α označimo veličinu središnjeg kuta. Tad je obodni kut $\frac{1}{2}\alpha$. Prema uvjetu zadatka je $\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 330°$, tj. $\alpha = 220°$.

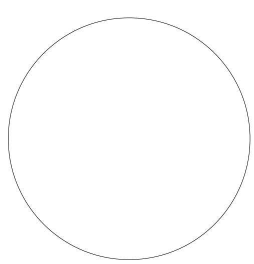
Primjer 3. U ravnini su zadane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koje se ne sijeku (vidi sliku 14.). Odredite one točke ravnine iz kojih se obje dane dužine vide pod kutom od 30°.



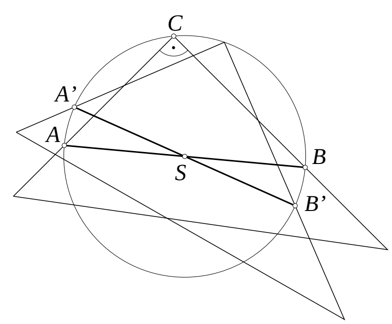
sl. 14.

Rješenje. Iskoristimo rješenje iz prvog primjera i konstruirajmo skup točaka iz kojih se $\overline{AB}$ vidi pod kutom od 30°, a zatim i skup točaka iz kojih se $\overline{CD}$ vidi pod kutom od 30°. Traženi je skup presjek ta dva prethodno dobivena skupa.

Primjer 4. Marko je na ploči šestarom nacrtao kružnicu, ali je zaboravio označiti njezino središte. Može li Marko, koristeći samo pravokutni trokut (i kredu, naravno), pronaći središte kružnice?



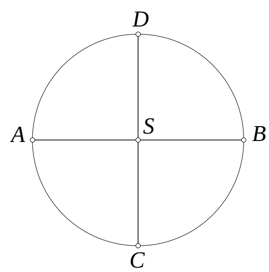
sl. 15. Gdje je središte ove kružnice?



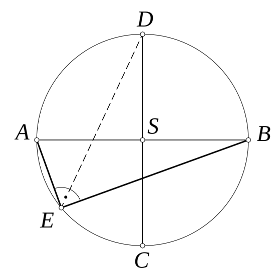
sl. 16

Rješenje. Može. Neka je s C označen vrh pravoga kuta tog pravokutnog trokuta. Postavimo li trokut tako da vrh C leži na kružnici, tada krakovi tog pravog kuta sijeku kružnicu u krajnjim točkama promjera. Tako se odredi jedan promjer te kružnice. Zatim pomaknemo trokut u novi položaj tako da vrh C leži na kružnici i nađemo drugi promjer. Presjek ta dva promjera središte je kružnice.

Primjer 5. Dana su dva okomita promjera kao na slici. Na luku $\widehat{AC}$ odabrana je proizvoljna točka E. Dokažite da je ED simetrala kuta $\sphericalangle BEA$.



sl. 17.



sl. 18.

Rješenje. Prema Talesovu poučku $\sphericalangle BEA = 90°$ jer je $\overline{AB}$ promjer. Kut $\sphericalangle BED$ obodni je kut nad lukom $\widehat{BD}$, a pripadni središnji je $\sphericalangle BSD = 90°$, pa je prema teoremu o obodnom i središnjem kutu $\sphericalangle BED = \frac{1}{2}\sphericalangle BSD = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$. Dakle, $\sphericalangle BED = 45° = \frac{1}{2}\sphericalangle BEA$, tj. $\overline{ED}$ je simetrala kuta $\sphericalangle BEA$.

Primjer 6. Iz točke V izvan kruga središta S povučena su dva polupravca koji kružnicu sijeku u točkama A, B, C, D tako da vrijedi

$$\widehat{AB} : \widehat{BD} : \widehat{DC} : \widehat{CA} = 9 : 13 : 12 : 2.$$

Odredi veličinu kuta $\sphericalangle DVA$.

Rješenje. Iz proporcionalnosti lukova slijedi i proporcionalnost pripadnih središnjih kutova, tj.:

$$\sphericalangle ASB : \sphericalangle BSD : \sphericalangle DSC : \sphericalangle CSA = 9 : 13 : 12 : 2,$$

pa uz oznake $\sphericalangle ASB = 9k$, $\sphericalangle BSD = 13k$, $\sphericalangle DSC = 12k$, $\sphericalangle CSA = 2k$ dobivamo $360° = 9k + 13k + 12k + 2k$, tj. $k = 10°$ i $\sphericalangle ASB = 90°$, $\sphericalangle BSD = 130°$, $\sphericalangle DSC = 120°$, $\sphericalangle CSA = 20°$. Trokuti ABS, BSD DSC jednakokračni su pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle DVA &= 180° - \sphericalangle DBV - \sphericalangle VDB \\
&= 180° - (\sphericalangle DBS + \sphericalangle SBA) - (\sphericalangle VDS + \sphericalangle SDB) \\
&= 180° - \Big(\frac{180° - 130°}{2} + \frac{180° - 90°}{2}\Big) \\
&\qquad\quad - \Big(\frac{180° - 120°}{2} + \frac{180° - 130°}{2}\Big) \\
&= 55°.
\end{aligned}$$

Zadaci za vježbu

1. Razlika između središnjeg i pripadajućeg obodnog kuta je $70°$. Koliki je središnji kut?

2. Konstruirajte skup točaka iz kojih se dužina $\overline{AB}$, $|AB| = 4$ cm vidi pod kutom od $15°$.

3. Pod kojim se kutom iz točaka kružnice vidi tetiva jednaka njezinu polumjeru?

4. Kutovi u trokutu su α, β, γ. Koliki su kutovi trokuta kojemu su vrhovi dirališta tom trokutu upisane kružnice? (Odgovor: $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90° - \frac{\gamma}{2}$.)

5. Dokažite da kružnica nacrtana nad krakom jednakokračnog trokuta kao nad promjerom prolazi polovištem osnovice.

6. Iz točke V izvan kruga povučena su dva polupravca koji kružnicu sijeku u točkama A, B, C i D (vidi sliku 20.). Dokažite da je kut $\sphericalangle DVA$ jednak razlici obodnih kutova nad lukovima $\widehat{BD}$ i $\widehat{CA}$.

7. Zadana je dužina $\overline{AC}$ i pravac koji siječe tu dužinu. Konstruirajte pravokutnik $ABCD$ kojemu je $\overline{AC}$ dijagonala, a jedan od preostalih vrhova nalazi se na pravcu p.

8. Konstruirajte unutar kvadrata $ABCD$ točku iz koje se stranica $\overline{AB}$ vidi pod kutom od $60°$, a $\overline{BC}$ pod kutom od $120°$.

9. Unutar šiljastokutnog trokuta konstruirajte točku iz koje se stranice trokuta vide pod istim kutom.

10. Konstruirajte trokut kojemu je zadana duljina jedne stranice, kut nasuprot te stranice i visina na tu stranicu.

REKLI SU

"Postoji još jedan razlog zašto matematiku treba visoko cijeniti. Naime, matematika daje prirodnim znanostima onaj stupanj uvjerljivosti koji bi bez nje bio nedostižan." *A. Einstein*

"To čime su se u prethodnim epohama borili samo zreli umovi učenih muževa kasnije je postalo dostupno shvaćanju djece." *Hegel*

"Radoznalošću počinje spoznaja svijeta. Upravo ona je i najkarakterističnija značajka mladosti, kada se formira ličnost i znanja usvajaju osobito brzo i solidno. Bez radoznalosti, po mom mišljenju, čovjek se ne može normalno razvijati."
. *L. D. Landau*

"Svaki zadatak koji sam rješavao kasnije je postao pravilom pomoću kojega sam rješavao druge zadatke." *R. Descartes*